

Title	新体系物理学が,電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて;原子構造,ラーモア反磁性の説明,ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬
Author(s)	飯田, 修一
Citation	物性研究 (1984), 42(2): 160-203
Issue Date	1984-05-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/91327
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

新体系物理学が、電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて；原子構造，ラーモア反磁性の説明，ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬

東大・理 飯 田 修 一

(1984年3月16日受理)

§ 1. 序

筆者により建設された新体系物理学，“New Frame of Physics”は、昭和58年、物性研究誌に、始めてその全体像の概要が示された¹⁾。その結果、量子物理学と古典物理学の厳密な接続関係が明らかにされて、物質の物理学の理解がより具体的になると共に、電子の軌道運動に伴う反磁性の理解が一新され、完全な導体，すなわち電気抵抗が厳密に零であって、永久電流を維持できる物質は、もし存在すれば、それは古典物理学の範囲内で、既に完全反磁性，すなわちマイスナー効果を示すことが証明された。従って超電導体の示すマイスナー効果は、その完全導体性に附随するものであって、量子力学は、それが電気抵抗零の完全導体になるためにのみ重要であり、マイスナー効果は、それに直結した古典物理学的性質であることが結論されたのである。しかし以上の結論は、相当に複雑、且つ膨大な新物理学の理論展開の結果確立されたものであって、前記の概要¹⁾は全体を一定の頁数の範囲内に収めねばならない編集上の要求によって、要約形式にならざるを得ず、従って、一般の物理学関係者が、その本質を理解するのは容易でない抽象的な形式の公表状況になっている。そこで本稿では、大学院学生を含む一般の物理学関係者を対象として、出来るだけ平易に、新体系物理学が提示する電子の軌道運動と、固体内自由電子の反磁性に関する結論の内容を、原子の電子構造と言った基本的部分から出発して、解説し、いわゆるクーロン・ガスに対するランダウ反磁性の内容とその誤謬点を明確化して、この問題に結着をつけたいと考える。

新体系物理学の建設は、物理学における新しい鉤脈の発見であって、新体系物理学をあらゆる物理現象に適用して、そこから有効な果実を摘み取ることは、これからの仕事である。と

くに多くの物理現象において、その古典物理性と量子物理性の限界と接続関係を明らかにすることは、常に新しい物理学探求の糸口となり、新鮮な概念、原理、更に新しい実験の開発される高い可能性を持つことを強調する。新体系物理学は、電子の軌道運動磁性の熱統計力学エネルギーに関して従来の取り扱いと決定的に異なる結論を与える⁴⁾。しかし電子の軌道運動の記述そのものは、従来も対応原理の立場で同様に取り扱って来たことであるとも言えるが、新体系物理学の成立は、そうした古典物理学的記述探求の有意義性に関して絶対に近い信頼度を保証した点が異なっている。更に未公表ではあるが、電子の永久電流モデルを基礎にして、ハミルトンの作用原理を相対論的に厳密に適用すると $g = 2(1 + \alpha/2\pi)$ の電子に関し、トーマス因子を含む、軌道および摂動運動の完全な運動方程式が導出されることが判り、新体系物理学の基礎は更に充実しつつある。

なお磁場のもとでの電導電子の挙動は、量子ホール効果など最近重要な応用が、半導体分野や、プラズマ物理学の分野で発生しつつある。とくに 10^{-6} といった高精度の量子ホール効果の理論においては、境界面に沿って常磁性的に運動する電子軌道が、存在するか否かが、決定的に重要となってくる。新体系物理学は、この常磁性電子は非常に高い磁気エネルギーを持つものとして、その存在が殆んど否定される。この結論と一致して、常磁性境界電子群を無視した理論が、実験と合致するものとして発展しつつあり⁵⁾、新体系物理学の新しい実証例になりつつある。

本稿も筆者の論文の慣習に従い^{2),3)} MKSP 系 (MKS 有理化ガウス系) を使用する。

なお筆者は実験物理学者であり、本来実験物理学に最大のエネルギーを傾注しているものであるが、この課題は筆者以外に解決が出来ない状況にあり⁶⁾、磁性物理学の研究者として避けて通れぬ課題であって、筆者が解決することになったことを御理解戴きたい。

§ 2. 本解説に必要な新体系物理学の新物理概念

新体系物理学は電子のスピン構造を含めて、各種の新概念、新原理を開発提示したが、その中で本解説に必要なものに限定して、ここに再録してみよう。

- A. 古典物理学方程式は、それを代数表示して、演算子関係式と見る限り、殆んどの式が量子物理学の世界でも成立する。
- B. ハミルトニアン形式の方程式よりも、ラグランジアン形式の方程式の方が、多くの場合より本質的であり、特に電磁シグナルの伝達速度の有限性を考慮せねばならない場合、この見地が重要になる。多電子系の反磁性の熱統計現象には、この条件を正しく考慮せねばならない微妙な極限機構が関与する。

- C. 最終平衡状態が、巨視的に不均一になる体系では、B項が重要になる可能性があり、その際、単純な系で使用された量子熱統計力学の関係式

$$\text{Trace}[\exp(-\beta \mathcal{H})] \quad (1)$$

は、その物理学的根拠を失う。

- D. 量子物理学の状態を、古典物理学の方程式に従う古典状態の、非常な多数箇の集合としての、アンサンブルで代表させ、古典概念を或る程度使用して考えることが可能である。もちろん、アンサンブルが定常なら、その量子状態は定常で、輻射の発射などは起らないと考える。
- E. 巨視的に不均一な量子系を、各部分に対して通常の量子物理学の常識を適用し、全体的には古典物理学の考え方を適用して、近似してゆくことが可能であり、複雑な系に対する唯一の方法になる。
- F. Schrödinger の状態関数 $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \dots, \mathbf{r}_N, t)$ を状態表示の基本と考え、他の表示は、その数学変換と見做す立場を取る。電子に関する状態関数 ψ は、その電子に関する極大知識を代表し、電子そのものを示す波動と、数学的操作の中で現れてくる実在そのものではない波動とが、不可分に融合しているものと解釈する。
- G. 磁気学の課題では、磁気誘導による電磁エネルギーの移動と、磁場 \mathbf{H} の持つ磁気エネルギーは本質的に重要である。ところが、従来の r -マトリックスを使用した量子電磁力学、Q. E. D., は、この両者を一緒にしてその理論構成の中から消しているという構造を持っている。電子そのものといった単純な対象の解析は、それで十分であり、八桁といった高い精度の一致も得られるが、物性論の対象である巨視的世界に、その取扱の儘で拡張することは不可能であり、新体系物理学が優位に立つ。
- H. 従来の電子の軌道運動に関するハミルトニアンには、印加磁場の源と、試料の磁化との間の相互作用磁場エネルギーが本質的に脱落し、従って、熱力学的に意義のあるエネルギーとしては不完全になる⁴⁾。
- I. 従来は、ボーアの対応原理があるとは言え、それはかなり定性的且つ莫然としたものであって、量子物理学と古典物理学は根本的に異なる二つの物理学体系であって、基本的な点と詳細な点の両者に互って、その間の対応は完全ではないと考えられた。新体系物理学は、両者の対応が本質的であって、とくに物性論の領域では、パウリ近似ディラック・ハミルトニアンといった最も基本的な量子物理学の方程式が、その C -数表現に関する限り、古典物理学的に導出されることを示した。従って、あらゆる物理現象に対し、新体系物理

新体系物理学が、電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて；
原子構造，ラーモア反磁性の説明，ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬

学は、両者の対応関係を、その詳細な点に至る迄解析し明確化することにより、知られていない物理学の機構，原則を見出すことが出来るという，物理学研究上の新しい一般原理を提起する。なお新体系物理学で提示されるマクスウェル・ローレンツの古典物理学の世界¹⁾には、摩擦のような原因の判らないエネルギーの散逸はないと考える。その事情は更に§8で詳しく説明される。

説明は順序として、原子構造の理解から出発する。また、多電子系の軌道運動反磁性の従来の取り扱いには、仮定や前提における本質的な誤謬と、計算段階における小さな誤まりや、近似の程度の判らない近似の使用などが、錯綜し、大変混乱している。それで、本稿では出来るだけ疑点のない、仮定や前提が明確で、計算上に曖昧さのない理論を主に取り上げて、それを基幹として、新体系物理学による電子の軌道運動反磁性の理解を説明する。

§ 3. 原子構造の理解

原子の零次近似の電子波動関数は、⁷⁾ 球座標により

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) \cdot \Theta_{lm}(\theta, \phi) \quad (3-1)$$

で示されて

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-\frac{r}{na}} \left(\frac{2r}{na}\right)^l L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right) \quad (3-2)$$

$$\Theta_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{(2l+1) \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \cdot P_l^m(\cos\theta) \cdot e^{im\phi} \quad (3-3)$$

$$E_n = -\frac{Z'^2 m_0 e^4}{32\pi^2 n^2 \hbar^2} = \left(-\frac{Z' e^2}{4\pi a}\right) \frac{1}{2n^2}, \quad a = \frac{4\pi\hbar^2}{Z' m_0 e^2} = \frac{a_0}{Z'} \quad (3-4)$$

である。ここで、 Z' は実効 Z 数であり、

$$a_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{m_0 e^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.529 \text{ \AA} \quad (3-5)$$

はボーア半径である。規格化は

$$\int_0^\infty R_{nl}^2(r) 4\pi r^2 dr = 1 \quad (3-6)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\Theta_{lm}(\theta, \phi)|^2 \frac{\sin\theta d\phi d\theta}{4\pi} = 1 \quad (3-7)$$

に取っている。

さて新体系物理学では波動関数を実在的な波動と、確率波や数学的な道具としての波動とが不可分的に融合したものと表現したが、原子内電子の波動関数のように、小さな領域に集中して定常状態にある波動関数では、統計確率的な結果を与えるというよりも、むしろ電子自身に伴う実在の波動的要素が大きいと考える。その理解の中で、電荷は

$$(-e) \psi^* \psi \quad (3-8)$$

に従って分布し、軌道運動に伴う電流は、一般形では

$$\begin{aligned} [\psi^* (-e \mathbf{v}) \psi] &= \left(\frac{-e}{2m_0} \right) [\psi^* \{ (\frac{\hbar}{i}) \nabla - (\frac{-e}{c}) \mathbf{A} \} \psi \\ &\quad + \psi \{ (-\frac{\hbar}{i}) \nabla - (\frac{-e}{c}) \mathbf{A} \} \psi^*] \end{aligned} \quad (3-9)$$

によって存在するものと考えられる。ただし、新体系物理学の立場⁸⁾に立っているから、

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (3-10)$$

は、軌道運動に伴う、電子速度の演算子であり、シュレディンガー近似の立場で

$$e > 0, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{m_0} \{ \mathbf{p} - (\frac{-e}{c}) \mathbf{A} \} = \frac{1}{m_0} \{ \frac{\hbar}{i} \nabla - (\frac{-e}{c}) \mathbf{A} \} \quad (3-11)$$

とおくと共に、式(3-9)では、古典物理学の立場に従う電流を取り出していて、実数であるように右辺を変形していることが注意される。 \mathbf{A} はもちろん、その電子に働くベクトル・ポテンシャルである。この際、 ψ_{nlm} を実在的に考えたとしても、一つの電子を構成する ψ_{nlm} の他の部分の造る電流が、(3-11)式の \mathbf{A} として自分自身に寄与することはない。式(3-1) - (3-3)までの表現において、虚数表示は式(3-3)だけで、式(3-9)により、軌道運動に伴う電流には虚数表示が不可欠で、従って $e^{im\phi}$ に伴う電流しか、この場合現れない。(3-1)の表現は z 軸を特別な量子化軸とした表示である。これから m の値により $2l+1$ ケに縮退した $\theta_{l,m}$ ($-l \leq m \leq l$)を直交変換して、虚数の現れない表示にすることも出来て⁷⁾結晶中の軌道状態の表示に使われている。

なお式(3-9)は、 $|\psi|=0$ の場所では零になる。従って $|\psi|=0$ の場所では電流は存在しないが、原子内の波動関数のように一つの電子の波動関数自身が、定常状態で、 $r=r_0$ の一定値のところ、節として、 $|\psi|=0$ であるとする、一つの電子が、 $r=r_0$ の球面で定常的に二分されていることになる。これらは古典的描像の及び得ない量子物理学の描く物質粒子の波動性によるものと理解される。

新体系物理学が、電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて；
原子構造，ラーモア反磁性の説明，ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬

さて、式(3-1)を導くシュレディンガーの定常状態の方程式は、(3-11)式の $\mathbf{A}=0$ として

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_0} \mathbf{p}^2 + U(\mathbf{r}) \quad (3-12)$$

$$\mathcal{H}\psi = E\psi \quad (3-13)$$

である。さらに角運動量を示す演算子^{9),10)}

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad l_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3-14)$$

$$l^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (3-15)$$

$$l^2 \Theta_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) \Theta_{lm}(\theta, \phi) \quad (3-16)$$

と動径 \mathbf{r} 方向のエルミート演算子[†]

$$p_r = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (3-17)$$

によって

$$\frac{1}{2m_0} \mathbf{p}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{l^2}{2m_0 r^2} \quad (3-18)$$

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m_0} + \frac{l^2}{2m_0 r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi r} \quad (3-19)$$

となり、第一項は動径方向への電子の運動エネルギーの成分となる。 \mathbf{v}_\perp をそれに直角な速度の成分とすると、

$$\frac{l^2}{2m_0 r^2} \sim \frac{(rm_0 v_\perp)^2}{2m_0 r^2} = \frac{m_0 v_\perp^2}{2} \quad (3-20)$$

から、第二項は (θ, ϕ) 方向、即ち回転方向の運動エネルギーの成分である。

さて、ファインマンの定理とビリアル定理(附録A.)

$$\frac{\partial E_n}{\partial \alpha} = \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha} \right\rangle_n \quad (3-21)$$

[†] $(\hbar/i)\partial/\partial r$ はエルミートにならない。

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\xi} p_\xi \right\rangle = \left\langle q_\xi \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\xi} \right\rangle \quad (3-22)$$

などにより、解の古典的意義を解明する。そのために

$$\sqrt{4\pi r^2} R_{nl}(r) = \mathcal{R}_{nl}(r) \quad (3-23)$$

とおく。これで式(3-6)の規格化の条件は、半無限の一次元系と一致する。こうして

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi r} \right] \mathcal{R}_{nl}(r) = E_{nl} \mathcal{R}_{nl}(r) \quad (3-24)$$

が得られる。それで

$$p_r^* = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dr}, \quad [r, p_r^*] = i\hbar \quad (3-25)$$

とすると、上式は

$$\left[\frac{(p_r^*)^2}{2m_0} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_0 r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi r} \right] \mathcal{R} = E \mathcal{R} \quad (3-26)$$

という一次元の量子力学の方程式となり、そのポテンシャル $U^*(r)$ は、 $r \rightarrow 0$ で $+\infty$ 、 $r \rightarrow \infty$ で、負の値で零に近接し、従って極小値を

$$r_M = \frac{l(l+1)}{2} a, \quad a = \frac{4\pi\hbar^2}{Zm_0 e^2} \quad (3-27)$$

で取る。 r_M は l と共に、 $l(l+1)$ に比例して急激に増大し、従って、軌道は外側に広がることが示される。この r_M が、量子数 n に関係しないことも指摘される。

さて式(3-26)にビリアル定理、式(3-22)を適用し、

$$\left\langle \frac{(p_r^*)^2}{2m_0} \right\rangle_p = - \left\langle \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{l(l+1)}{r^2} \right\rangle_p + \left\langle \frac{Ze^2}{8\pi r} \right\rangle_p \quad (3-28)$$

が得られる。ここで、式(3-26)の固有関数をわれわれは既に知っているのので、その事を利用して、 n の代りに量子数 p

$$p = n - l - 1 \geq 0 \quad (3-29)$$

によって、固有状態を指定している。当然

$$\left\langle \frac{(p_r^*)^2}{2m_0} \right\rangle_p + \left\langle \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{l(l+1)}{r^2} \right\rangle_p + \left\langle -\frac{Ze^2}{4\pi r} \right\rangle_p = E_p = -\frac{Z^2 m_0 e^4}{32\pi^2 (p+l+1)^2 \hbar^2} \quad (3-30)$$

新体系物理学が、電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて；
原子構造，ラーモア反磁性の説明，ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬

であるから，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\langle -\frac{Z e^2}{4 \pi r} \right\rangle_p = E_p &= -\frac{Z^2 m_0 e^4}{32 \pi^2 (p + l + 1)^2 \hbar^2} \\ &= -\left\langle \frac{(p_r^*)^2}{2 m_0} \right\rangle_p - \left\langle \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2 m_0 r^2} \right\rangle_p \end{aligned} \quad (3-31)$$

となる。更に式(3-26)を l で微分すると

$$\left\langle \frac{\hbar^2}{2 m_0} \frac{2l+1}{r^2} \right\rangle = \frac{Z^2 m_0 e^4}{16 \pi^2 (p + l + 1)^3 \hbar^2} = \frac{Z^2 m_0 e^4}{16 \pi^2 n^3 \hbar^2} \quad (3-32)$$

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{Z^2 m_0^2 e^4}{8 \pi^2 \hbar^4 n^3 (2l+1)} = \frac{1}{(\sqrt{l + \frac{1}{2}} \cdot a)^2} \quad (3-33)$$

が得られ，(3-27)式の結果を裏書きする。従って，回転方向の運動エネルギーの成分は

$$\left\langle \frac{\hbar^2}{2 m_0} \frac{l(l+1)}{r^2} \right\rangle = \frac{Z^2 m_0 e^4}{16 \pi^2 n^3 \hbar^2} \frac{l(l+1)}{2l+1} \geq 0 \quad (3-34)$$

である。又動径方向の運動エネルギーの成分は(3-30)，(3-31)，(3-32)より

$$\left\langle \frac{(p_r^*)^2}{2 m_0} \right\rangle = \frac{Z^2 m_0 e^4}{32 \pi^2 n^3 \hbar^2} \frac{2lp + n}{2l+1} = \frac{Z^2 m_0 e^4}{32 \pi^2 n^3 \hbar^2} \left[n - \frac{l(l+1)}{l + \frac{1}{2}} \right] > 0 \quad (3-35)$$

と計算される。

従って，動径方向の運動エネルギーの成分は必ず零より大きいが，回転方向の成分は零を含み，それは s 関数($l=0$)の場合である。表1に二つの成分の相対強度を，各電子軌道に対して示す。

さて，表1において， s, p, d, f は軌道角運動量量子数 $l=0, 1, 2, 3$ に対応し，回転方向の運動エネルギーは，主量子数 n に無関係であって， $0, 2, 6, 12, 20$ と単調に増大する。

ところが，動径方向の運動エネルギーは， ns, np, nd, nf については n と共に単調増大で

表1. 動径および回転方向の運動エネルギー成分の相対比較

	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f	5s	5p	5d	5f	5g	6s	6p	6d
動径方向 $lp + \frac{n}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	2	4	4	2	$2\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	3	7	9
回転方向 $l(l+1)$	0	0	2	0	2	6	0	2	6	12	0	2	6	12	20	0	2	6

あるが、同一の n で考えると、 $2s \rightarrow 2p$ で不変で、 $3s \rightarrow 3p$ は増大するが、 $3p \rightarrow 3d$ で減少し、同様に $4d \rightarrow 4f$ 、 $5d \rightarrow 5f$ で減少している。従って、回転方向成分対動径方向成分の比率は $3d$ で 4、 $4f$ で 6、 $5f$ で 2.2 と言った値になる。 $3d$ 、 $4f$ 、 $5f$ が非閉殻状態で安定で、それらに非閉殻を伴ったイオンが磁性イオンを形成すること、又それらの非閉殻の安定性は、 $4f$ が最大であることなどの事情と、上記の数字とは十分に関連している。

さて附録の式 (A-4) を適用すると、(3-34) も利用して、

$$\left\langle \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_0 r^3} \right\rangle = \left\langle \frac{Ze^2}{8\pi r^2} \right\rangle = \frac{Z^3 m_0^2 e^6}{64\pi^3 \hbar^4} \cdot \frac{1}{n^3 (2l+1)} \quad (3-36)$$

が得られる。更にダビドフによると¹¹⁾

$$\langle r \rangle = \frac{1}{2} [3n^2 - l(l+1)] \frac{4\pi\hbar^2}{Zm_0 e^2} \quad (3-37)$$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{n^2}{5} [5n^2 + 1 - 3l(l+1)] \left(\frac{4\pi\hbar^2}{Zm_0 e^2} \right)^2 \quad (3-38)$$

である。従って、波動関数の、平均半径 $\langle r \rangle$ よりの平均偏差値

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle} &= \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} \\ &= \frac{1}{2} [(n^2 + 1)^2 - (l+1)^2 l^2 - 1]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4\pi\hbar^2}{Zm_0 e^2} \right) \end{aligned} \quad (3-39)$$

と計算される。表 2 に、各電子殻に対する平均軌道半径、 $\langle r \rangle$ および、平均偏差値の相対値

$$[3n^2 - l(l+1)], [(n^2 + 1)^2 - (l+1)^2 l^2 - 1]^{\frac{1}{2}} \quad (3-40)$$

を示す。非閉殻構造で安定となり、磁性に寄与する典型的な電子殻、 $4f$ と $3d$ が、その $\langle r \rangle$ が、同一の n 数の他の電子殻よりも、小さく、従って、原子の内部にあり、又 $[\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle]^{\frac{1}{2}}$ も又小さくて、まとまった形で存在することになることを、これらの数値から読み取って戴きたい。表 1 の大きい回転方向の運動エネルギーと合せて、たとえ、 $3d$ の鉄族原子、イオンの場合には、周囲からの結晶電場の影響などにより、軌道運動磁気能率、従って、定方向の軌道運動角運動量成分を持つことが、少いという事情にあるとはいえ、 $l=2$ の全角運動量は常に維持していて、磁性に最適の電子殻を形成していることが、十分に読みとれる。

なお原子構造は最も単純な量子系の一つである。全系としては、そのハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \sum_i \left[\frac{1}{2m_0} \mathbf{p}_i^2 - \frac{Ze^2}{4\pi r_i} \right] + \sum_{i>j} \frac{e^2}{4\pi r_{ij}} \quad (3-36)$$

であって、シュレディンガー近似でもなお、一電子近似である今までの記述に加えて、電子双互間の静電相互作用を入れなければならない。ところが、本質的には式(3-1) 状の波動関数の積の線形結合を基礎とし、唯 Z を Z' と考えると共にパラメーターを(3-36) 式が極小化するように定めることにより、既にエネルギー値において、2~3% といった高い精度での一致を得ることが出来るようである。¹²⁾ 従って一電子関数とパウリの原理だけを武器として、相当程度に高い近似が得られると信ずることの出来る根拠がある。

これらの状況は新体系物理学の古典的アンサンブルの立場で、次のように理解される。先づパウリの原理に関し、二つの永久電流環²⁾ で表現された二電子は、もしスピンの反平行であれば、全スピン角運動量を保存した儘、互のスピンの軸を回転できて、磁気エネルギーの変化を零に保ち乍ら近接できる。しかし、もしスピンの平行であると、全スピン角運動量を保存する限り、ある方向より近づいた場合、巨大な磁気エネルギーの増大、もしくは減少があり、二電子が近接した状況のもとで、不確定性原理による

不確定距離の範囲内で、磁氣的相互作用エネルギーが、近接の相対方向により激しく変動し、固有解の形式を取り得ないという特徴が発生する。この場合、量子力学的にはパウリの原理によって二つの電子の波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ は、必ず互に直交し、従って重畳度の低いものであり、さらに反対称化することによって、二電子の重畳域では電子の波動関数は自動的に零に近づく。この事は、パウリの原理が、新体系物理学の立場に立つ電子の古典像より予想される、波動像での矛盾を、自動的に解決することを示す。¹³⁾ 換言するとパウリの原理は、新体系物理学の電子の古典像が、量子物理学の枠組みと両立するために必要な条件であり、その成立の基礎に二電子のスピンの磁気能率間の強い磁氣的相互作用が介在することになる。従って、交換磁場 (Ex-

表 2. 波動関数の平均位置 $\langle r \rangle$ および平均偏差 $[\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle]^{1/2}$ の相対比較

電子殻	$\langle r \rangle$	$[\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle]^{1/2}$
1 s	3	1.7
2 s	12	4.9
2 p	10	4.5
3 s	27	10.0
3 p	25	9.8
3 d	21	7.9
4 s	48	17.0
4 p	46	16.9
4 d	42	15.9
4 f	36	12.0
5 s	75	26.0
5 p	73	25.9
5 d	69	25.3
5 f	63	23.0
5 g	55	16.6
6 s	108	37.0
6 p	106	36.9
6 d	102	36.5
6 f	96	35.0
6 g	88	31.1
6 h	78	21.6

change Field) は、言葉通りの古典物理学的意義を持つことが、望見される。

さて以上の事実を踏まえて、電子間相互作用を無視した近似の妥当性について、次の二つの事実が指摘される。先ず第一は上記パウリの原理によって、スピンを平行にしている二電子は、相互に近接する確率が小さいから、必要な補正は小さい。スピンの反平行な場合には近接する訳であるが、近接した結果衝突したとしても、もともと電子間相互作用は内力であって、全運動量、全角運動量などを保存した衝突であり、又二電子を区別することが出来ないから、衝突して互に反転した運動と、衝突しないで、互に通り返けた運動との区別が出来ない。第二に、原子の場合の s 電子のように、クーロン静電双相互作用は、 $r \rightarrow 0$ で ∞ になるけれども、波動方程式の枠組みの中で、この $1/r$ の ∞ は、それ程特異的でなく、有限の電子密度 $\psi^* \psi$ の値でも数学的に矛盾がない。符号が異なるけれども電子間の双相互作用も同様であって、特別な状況にある磁気双相互作用が、前記のようにパウリの原理に従って、零近似の矛盾が除去されている以上、残る静電相互作用に関しては、一電子波動関数の積の一次結合によって殆んど十分に表現され、必要な修正は、その解の基本的性格を変えるものでないというように理解される。

さて、しかしながら、ここで一つの注意事項として、以上の結果のすべてを、次節以下で問題にしてゆく自由電子、あるいは電導電子の反磁性に関して、適用可能と考えることには稍問題がある。それは、自由電子の場合には (3-36) 式で基本となった、原子核からの強い静電引力項が欠除している。そして、電子間静電相互作用項は、式 (3-36) において、たとえ、磁場の印加による弱い磁気力が加わったとしても、その主要作用力を形成している。更に、電導電子の場合には、イオン・コアからの静電引力も重要で、電子波の散乱、即ち、電子系の全運動量、全角運動量に変化を与える点で、電子間相互作用項とは質的に異なる作用を与える。従ってこれらは無視することは、絶対に許されない。一つの重要な差異は、電子間作用だけの自由電子の場合には永久電流を持つ可能性があるが、イオン・コアよりの散乱、即ち抵抗のある場合には、永久電流は存在できない。

なお電子の古典的大きさは新体系物理学では 10^{-2} \AA と考える^{2), 14)} この大きさが、古典物理学の全体系の中で矛盾しないことは、文献 1), 14), 特に文献 14) の Appendix A で詳述されるが、ボーア磁子を持つために絶対に必要な大きさで、Q. E. D. のダーウィン項よりの推定とも一致し¹⁵⁾ それに対する反証は全くないことを附記させて戴く。

§ 4. ラーモアの反磁性

さて、原子、イオン、分子に対して、ラーモアの反磁性の理論がある。結論は簡単で、それらの電子群はその磁場に垂直な平均軌道半径の二乗の和に比例した反磁性を示し、ラーモアの

新体系物理学が、電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて；
原子構造，ラーモア反磁性の説明，ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬

反磁性と呼ばれる。今からその運動方程式のラグランジアン表現を示す。われわれは新体系物理学の立場に立ち、その方程式はq数方程式(q: quantal)として、量子力学的にも有効と考える。さてかなりの数の電子があるとして、

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \nabla_i L_i = q_i \nabla_i \left[\frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)}{c} - \Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \right] \quad (4-1)$$

$$\mathbf{p}_i = m\mathbf{v}_i + \frac{q_i}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \mathbf{H}_1 \times \mathbf{r}_i \quad (4-2)$$

$$\Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = - \sum_i \frac{Z e^2}{4\pi r_i} + \sum_{i,j} \frac{e^2}{4\pi r_{ij}} \quad (4-3)$$

が得られる。ここに $\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)$ は外部より印加した磁場 \mathbf{H}_1 に伴うベクトル・ポテンシャル、 $\Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ は、単一の原子核と、他のすべての電子から来る電気ポテンシャルであり、 \mathbf{p}_i は*i*電子の運動量で、 $m\mathbf{v}_i$ の力学的運動量と、 $q_i \mathbf{A}/c$ の電磁場の運動量(文献1)，式(11)参照)から成立すると理解する。量子論で、演算子に変換するのは、式(3-11)に従い、全運動量 \mathbf{p}_i である。ラーモアの考えに従い、

$$\omega_L = \frac{e}{2mc} \mathbf{H}_1 \quad (4-4)$$

によって、角速度ベクトル ω_L を定義し、*i*電子の速度 \mathbf{v}_i を

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i' + \omega_L \times \mathbf{r}_i \quad (4-5)$$

と分解する。 \mathbf{r}_i は原子核より*i*電子へのベクトルである。 \mathbf{v}_i' は式(4-5)によって、原子核を中心とし、角速度 ω_L で回転する回転系*S'*上で見た、*i*電子の速度ベクトルを、静止系の*S*系より眺めたものになっている。従って

$$\mathbf{p}_i = m\mathbf{v}_i' + m\omega_L \times \mathbf{r}_i - \frac{e}{c} \frac{1}{2} \mathbf{H}_1 \times \mathbf{r}_i = m\mathbf{v}_i' \quad (4-6)$$

が得られる。更に

$$\begin{aligned} & \frac{q_i}{c} \nabla_i [\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)] \\ &= \frac{q_i}{c} \left[\{(\mathbf{v}_i' + \omega_L \times \mathbf{r}_i) \cdot \nabla_i\} \frac{H_1}{2} (-y_i, x_i, 0) + (\mathbf{v}_i' + \omega_L \times \mathbf{r}_i) \times H_1(0, 0, 1) \right] \\ &= m\omega_L \times \mathbf{v}_i' + m\omega_L \times (\omega_L \times \mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (4-7)$$

となる。従って式(4-1)から

$$m \frac{d\mathbf{v}_i'}{dt} = m\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{v}_i' + m\boldsymbol{\omega}_L \times (\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r}_i) + e\nabla_i \Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \quad (4-8)$$

が得られる。式(4-8)の右辺の第二項は遠心力相当の項であって、通常の場合では極めて小さい。従って、S系から眺めた \mathbf{v}_i' の変化は、 $\boldsymbol{\omega}_L$ の角速度で、全体が回転していることを除くと、磁場 \mathbf{H}_1 のないときの運動状態と同一になる。従って体系は磁場のないときの状態を保ったまま、角速度 $\boldsymbol{\omega}_L$ で回転することになり、ラーモアの反磁性を示す。 $\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r}_i$ は、原子、イオンに対しては極めて小さい。新体系物理学の立場に立って、量子力学的な状態を示すアンサンブルを、古典的運動状態の和として形成させると、アンサンブル全体を回転させても、何等の矛盾も出ないと推定できる。従って、ラーモアの回転反磁性は、量子物理学の固有状態にも当然伴われなければならないと結論できる。

さて、これから、式(4-8)の成果を一般化して、ランダウ反磁性や¹⁶⁾ヴァン・リューエン磁性¹⁷⁾の考え方を十分に解析し、その誤謬点を明確化する操作に入る。そのために、式(4-1)を一般の円柱対称の電気ポテンシャルの場の中にある多電子系の式であると考え。そうすると、必要なことは $\Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ の中の

$$-\sum \frac{Ze^2}{4\pi r_i} \rightarrow \Phi(\mathbf{r}_i) \quad (4-9)$$

として、 $\Phi(\mathbf{r}_i)$ は円筒形の容器の中では零であって、それから出ると、無限大になるようなポテンシャル関数であると考えることになる。それだけの考慮をすると、式(4-8)までの計算はすべて有効に思える。しかし、詳細に定量的に当たると、更に次の重要な考慮が必要であることが判る。先づ、式(6)で、右辺の第二項

$$m\boldsymbol{\omega}_L \times (\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r}_i) \quad (4-10)$$

が、他の主要項 $e\nabla_i \Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ に対して無視される条件は、電場の源である原子核又はイオン・コアの実効電荷を $(+e)$ と最低に見積った場合、

$$m\omega_L^2 \rho_i \ll \frac{e^2}{4\pi r_i^2} \quad (4-11)$$

であって、磁場 H_1 を、 $11,120 \text{ Oe} = 10^3 \text{ T}$ とすると

$$\rho_i \ll \frac{mc^2}{\pi r_i^2 H_1^2} = 29 \text{ cm} \quad (4-12)$$

と計算される。従って、ミリメートル以下の大きさを考える限り、この項は大きくはない。つ

新体系物理学が、電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて；
原子構造，ラーモア反磁性の説明，ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬

ぎにこのラーモアの回転運動の結果予想される反磁性の磁場を考える。ラーモア反磁性に伴う反磁性電流は、電子密度を N_0 とすると

$$\mathbf{j} = N_0 (-e) \mathbf{v}_{\omega_L} = -e N_0 \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r} \quad (4-13)$$

であって、銅の場合の銅の原子数の個数密度¹⁸⁾ $8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ を N_0 として採用して見ると、中心の磁場 \mathbf{H} は、 ρ を円柱座標の動径として、

$$\mathbf{H} = \int_0^\rho \frac{\mathbf{j}}{c} d\rho \quad (4-14)$$

であって、³⁾ その値を印加磁場 H_1 に等しいとおくとその臨界的な ρ の値 ρ_c は

$$\rho_c = \sqrt{\frac{4 m c^2}{e^2 N_0}} = 370 \text{ \AA} \quad (4-15)$$

が得られる。式(4-15)の表現は、丁度超電導体の示すマイスナー効果の滲透深度定数 λ_p (p : penetration) の表現の二倍であって、本質的な関連の存在を示す。もちろんラーモア反磁性に伴う反磁性磁場が、印加磁場を打ち消す場合には、当然内部は磁場のない時の状態となり、ラーモア反磁性導出の前提(式(4-1), (4-2))が根底から崩れるが、その崩れた結果が、マイスナー効果の状態であることは、新体系物理学の立場に立って殆んど疑う余地がないであろう。ただし、この際熱統計効果如何という問題は残る。新体系物理学は、多電子系の最低固有電子状態が、磁場の印加と共にマイスナー効果の状態にそのまま移行すると予想するのであるが、 10^{22} といった多数箇の電子が関係した場合には、その熱統計効果に関して十分な理解を得ておく必要がある。これから、その説明に入る。

なお式(4-9)を仮定した場合には、容器内に於て式(4-3)の主要項は電子間のクーロン相互作用

$$\sum_{i,j} \frac{e^2}{4\pi r_{ij}} \quad (4-16)$$

であって、その相互作用の強さは、古典的には圧倒的である。¹⁹⁾ 従って全容器に拡がって、擾乱のない波動関数を考えることは不可能である。しかしながら、§3で詳しく説明したように、量子論の場合、波動的に拡がることと、パウリの原理の効果により、式(4-16)項の考慮が自動的に入り、式(4-16)項を無視したとしても、高い精度の近似が得られる場合が存在することも事実である。又その際、実際の電導電子には必ず存在する、イオン・コアとの相互作用如何という問題も相関する。従って、誠に微妙な、言い方によれば近似の程度の判らない近似の問題が、そこに発生してくるのであって、古来、多くの試みの対象となったのである。

§ 5. ヴァン・リューエン理論およびランダウ反磁性の概観

ランダウは1930年¹²⁾“金属の反磁性”と題して、容器内の自由電子が印加磁場 H_1 の中で示すであろう磁性の一つの量子力学的取扱いを示し、弱い反磁性が現れると結論した。この結論に先立ち、ヴァン・リューエンは1921年¹⁷⁾同一の対象の古典物理学的取り扱いを示し、磁化は生じないと結論した。ヴァン・リューエンの取り扱いは、その後ヴァン・ヴレックによって、極めて明解に解説されたが²⁰⁾その要点は次の通りである。

先づ運動方程式としては、電子間の相互作用を無視し、式(3-12)に磁場の考慮のみを加えたハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_0} \left[\mathbf{p} - \left(\frac{-e}{c} \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 - e\phi(\mathbf{r}) \quad (5-1)$$

を採用する。²¹⁾ $\phi(\mathbf{r})$ は式(4-9)の $\phi(\mathbf{r})$ である。更に、磁場 H_1 は円筒軸 z 軸に平行に印加されるものとする。そうすると z 軸方向への電子の運動は単純で一定速度であり、上下の境界面では単純に反射されるだけである。従って z 軸方向の運動を切り離し、 xy 面内だけの運動を考えることが出来る。そうすると、式(5-1)は、容器内では、本質的に、

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} m_0 (v_{\perp}^2 + v_z^2) \quad (5-2)$$

であって、運動エネルギーを示しているのに過ぎない。ここに v_{\perp} は xy 面内の速度成分である。運動は式(5-1)より

$$\frac{d\mathbf{p}_{\perp}}{dt} = -\nabla_{\perp} \mathcal{H}, \quad \frac{d\mathbf{r}_{\perp}}{dt} = \mathbf{v}_{\perp} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}_{\perp}} = \frac{1}{m_0} \left[\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]_{\perp} \quad (5-3)$$

として記述される。更にハミルトニアンの従来の常識を信頼して、 \mathcal{H} は熱力学的なエネルギーでもあると考える。そうすると、速度 v_{\perp} は何等の特殊性を持つ理由がないから、容器内の至るところ、壁の附近を含めて完全に統計的に分布する。そうすると図1に示したように、容器の内部の電子のサイクロトロン運動に伴われる膨大な反磁性は、容器の壁面を常磁性方向にサイクロトロン運動と衝突とを繰返しつつ逆回転してゆく、異常境界電子群によって完全に補償され、結果として、古典的には、何等の磁性も示さないことになる。

ランダウの量子力学的取扱いは、本質的にはこのヴァ

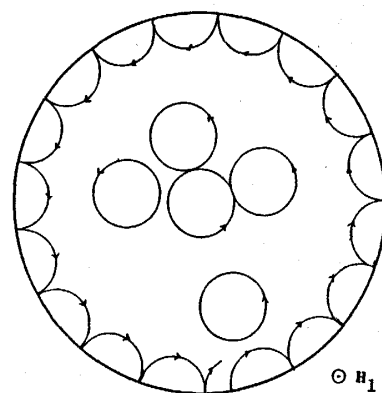


図1 軸に平行な磁場のもとにある円筒形容器内古典電子のサイクロトロン運動を、磁場に垂直な平面上に投影したもの

新体系物理学が、電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて；
原子構造，ラーモア反磁性の説明，ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬

ン・リューエンの取扱いと同等である。ただ量子力学の場合，壁面ではその波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ が，零にならなければならないから，その結果，古典電子系に較べて，境界面附近の電子群の密度が低下し，その結果，反磁性の相殺が不完全となり，小さい反磁性項が残ることになったという説明が成立する。²²⁾

以上の記述で，われわれ実験物理学者は直ちに本質的な疑問を生じる。それは，ほんとうに，磁場を印加された金属の表面には，図1に示されるような高速の電子（常温の kT で 10^5 m/s はある。もしフェルミ・エネルギーを $0.1 \sim 1 \text{ eV}$ とすると， $3 \times 10^6 \text{ m/s}$ に近づく。）が，常磁性的に運動しているであろうかということである。金属の表面附近も，内部とそんなに変わっている筈がない。もしそんなに高速の一方向きの電子群があると，当然なにかに影響しなければならない。例えば熱を発生するとか，或は何か表面だけ異なる性質を示すとかである。とくにランダウの反磁性の場合，上記のダーウィンの解釈が正しければ，反磁性に寄与する永久電流は，結果的には集中して，境界面附近に発生することになる。通常の電流と異なり，サイクロトロン運動の相殺が，表面附近だけ不完全ということではあるが，新体系電磁気学の立場に立ったとき，³⁾ 磁化 \mathbf{M} があるのではなく，巨視的なマクスウェルの表面電流 \mathbf{k} が現れ， $\chi \sim 10^{-5}$ （CGS Gauss 系）とすると，

$$k = 3.4 \times 10^7 \text{ s I/m} = 10^2 \text{ A/m} = 1 \text{ A/cm} \quad (5-4)$$

といった値になる。この電流が実在し得ようか。少くとも今までにそんな電流の存在が，認められたことはない。ここで少し角度を変えて，多数の電子が，熱的に駆動されて完全にランダムであっても，ヴァン・リューエンの解の状態だけが唯一の解ではないことを説明しておく。最初，電子系を磁場零の完全無秩序の状態にして置き，次に瞬間的に磁場 \mathbf{H}_1 を加えたとする。と，古典電子系は当然瞬間的に磁気誘導により，表面に Eddy Current が流れる状態になって，磁場の滲透は有限の厚さとなり，以後 Eddy Current の減衰と共に，次第に（といってもミリ秒以上の高速であろうが）内部に滲透する。この滲透状態のどの瞬間を取って見ても，電子群は Eddy Current を形成する極く僅かの漂流速度（Drift Current）の他は完全に統計的になって居る。そしてマイスナー電流の状態は，新体系物理学により示されたように，この種の状態の一種であって，その漂流速度が，滲透した静磁場によって自動的に維持される関係になっているのである。²³⁾ 従って完全無秩序とヴァン・リューエンの状態とは一義的に結合するものではない。

新体系物理学が明らかにしたことは，上記の素朴な疑問より遥かに本質的で，今まで未考慮の新物理機構存在の認識であり，式(5-1)を熱力学のエネルギーと考えること自体が過まっ

ていると結論する。そして、熱力学エネルギーとしては、⁴⁾ 外部磁場 H_1 と、試料 C_2 との間の磁氣的相互作用エネルギー

$$\iiint_{\infty} H_1 \cdot H_2 dV \quad (5-5)$$

を加えねばならないと主張する。このエネルギーは、境界面常磁性電子群の場合、

$$\iiint_{\infty} H_1 \cdot H_2 dV = \iiint_{V_2} \frac{A_1 \cdot j_2}{c} dV \quad (5-6)$$

となり、〔文献4〕、式(B12)〕

$$\left| \frac{1}{2} H_1 \times r \cdot \frac{ev}{c} \right| \sim 10^{1 \sim 2} \text{ eV} \quad (5-7)$$

といった膨大な値になる。ただし今 $H_1 \sim 10^3$ Oe, $|r| \sim 2 \times 10^{-3}$ m, $|v| \sim 10^{5 \sim 6}$ m/s と仮定している。従って、境界面を常磁性的に回る電子が、一つ消える毎に、体系の熱力学的エネルギーは、 $10^{1 \sim 2}$ eV といった膨大な利得を得る訳であって、もし、そんな電子が発生したとしても、直ちに、消えて定常には現れないと結論する。ただし、以上の結論を、解析的に納得のゆく形で示すのには、文献1)の長い論文が必要になったのである。

なお通常の金属はマイスナー効果を示さない。これは通常の金属内の電子が、完全な自由電子ではないからであって、新体系物理学は、超電導体のように永久電流を維持できる体系は、自動的にマイスナー効果を示すと結論する。このことは、境界面上を常磁性的に一周するような電子の量子力学的状態が、超電導体の場合には存在し得るが、常電導体の場合には存在できないことを示している。そしてわれわれはジョセフソン・ジャンクションによって、超電導体の場合、その波動関数は巨視的尺度まで、位相が相関することを知って居り、一方常電導体ではそのような相関は観測された例がないのである。従って常電導体の磁性の計算には、イオン格子の存在による電子の波動関数の散乱を本質的に考慮せねばならない。そして同時にサイクロトロン運動によって、大きい反磁性を生じ得る要因も存在する。後程説明するランダウ・レベルも、強い磁場のもとで、サイクロトロン半径が小さい場合には実在となる筈であるが、それらが、すべて熱擾乱と相関するという、複雑な状況と考えられる。以下の記述で説明されるように、そうした複雑な状況のもとで、計算結果として常電導体金属にランダウの反磁性項の桁の反磁性が得られる可能性が、十分にある。ランダウの反磁性項は、そうした微妙さを含む、ユニークな項であって、電子の箇々の運動が、マイスナー効果と異なり相互に相関せず、巨視的な永久電流を維持できないことを仮定した時、色々な計算の結果に現れるものである。しかし、永久電流を維持できる体系では、ランダウの反磁性は現れないという、新体系物理学の結

論は不変で，古典電子ガスも，量子電子ガスも，いずれも永久電流を維持できる体系なのであるから，⁶⁾ランダウ反磁性は現われない。

なお熱統計を行った結果としてのランダウ反磁性は，新体系物理学によって決定的に否定されるが，電子密度が小さく，電子間の相互作用の無視できる場合のランダウ準位は実在であり，又ランダウの想定した前提は超電導体の場合に妥当するなど，その計算の部分々々には有意義な結果が，いくつも含まれていると考える立場に立っている。

§ 6. 新体系物理学によるランダウ反磁性の解析，Ⅰ.

さて，体系は§4，§5で仮定した円柱対称の容器中の自由電子群とする。他に平行平板で囲まれた二方向に無限大のある自由電子群を考える方法²¹⁾もあるが，物理的完全性を重視する。

さて，図2に z 軸方向に磁場 H_1 が印加された状況で， xy 面上に投影された古典電子のサイクロトロン運動の軌跡を示す。図2は境界面と衝突しない場合である。サイクロトロン運動の半径 r_c は，

$$r_c = \frac{m_0 c v}{e H} = \frac{v}{\omega_c},$$

$$\omega_c = \frac{e H}{m_0 c} = 2\omega_L = 1.76 \times 10^7 H \text{ (Oe)} \quad (6-1)$$

となる。²⁵⁾ここで v は xy 面内の速度， ω_c はサイクロトロン角速度であって， H をOeで示すと s^{-1} になる。軸対称の系の中での運動であるから，角運動量 l

$$l = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \left(m_0 \mathbf{v} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \quad (6-2)$$

が一定の運動である。ランダウ・ゲージ，式(4-2)を仮定して，i)，図2(a)で，中心への最遠点 P_+ および，最近点 P_- で考えると，その動径は

$$\rho_{\pm} = \rho_0 \pm r_c = \rho_0 \pm \frac{v}{\omega_c} \quad (6-3)$$

である。 ρ_0 はその中心への動径で，その運動量は

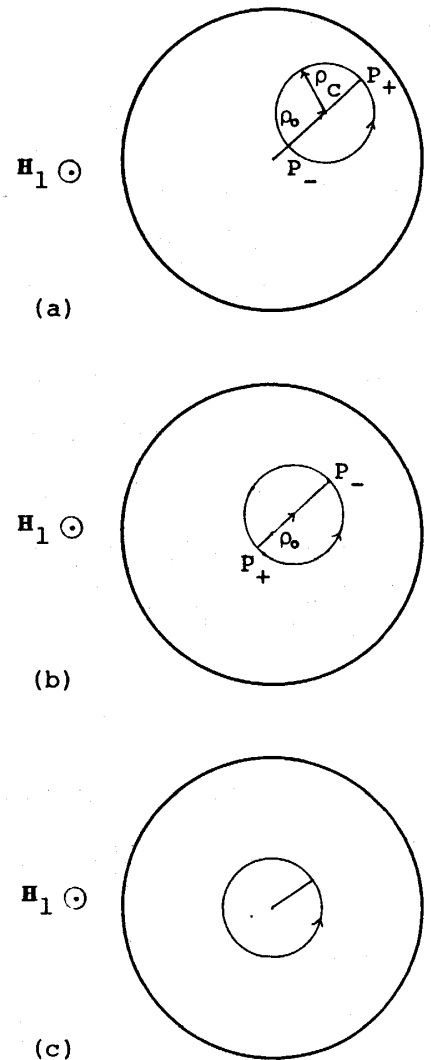


図2. 古典電子のサイクロトロン運動の三つの場合。(a) 円筒の中心を含め場合，(b) 円筒の中心が中に入った場合，(c) 円筒の中心と運動の中心が一致した場合。

$$p_{\pm} = \pm m_0 v - \frac{eH}{2c} \rho_{\pm} = \pm \frac{m_0 v}{2} - \frac{m_0 \omega_c \rho_0}{2} \quad (6-4)$$

であるから、それらの点で角運動量は

$$l = \left(\rho_0 \pm \frac{v}{\omega_c} \right) \left(-\frac{m_0 \omega_c}{2} \right) \left(\rho_0 \mp \frac{v}{\omega_c} \right) = -\frac{m_0 \omega_c}{2} (\rho_0^2 - r_c^2) < 0 \quad (6-5)$$

であり、確かに負で一定である、ii), 図2(b)の場合にも

$$p_{\pm} = m_0 v - \frac{eH \rho_{\pm}}{2c}, \quad \rho_{\pm} = r_c \pm \rho_0 \quad (6-6)$$

であって、

$$l = \rho_{\pm} p_{\pm} = \frac{m_0 \omega_c}{2} (r_c^2 - \rho_0^2) > 0 \quad (6-7)$$

であり正で一定である。とくに、図2(c)の場合、

$$l = \frac{m_0 \omega_c}{2} r_c^2 = \frac{m_0 v^2}{2\omega_c} > 0 \quad (6-8)$$

である。

サイクロトロン運動の半径 r_c は $\beta = v/c$ とおいて表3のようになる。表3によって、サイクロトロン運動の半径は一般に大きく、常電導の金属では、その平均自由行路程である 200 \AA 程度よりも遥かに長い場合が普通であり、純粹のランダウ・レベルの状況の発生は困難である。

次に境界電子群のことを考える。図3に示されるように、この場合

$$\rho_- = \rho_0 - r_c < \rho_L, \quad \rho_+ = \rho_0 + r_c > \rho_L \quad (6-9)$$

である。 ρ_L は境界までの動径値である。あきらかに角運動量の式(6-5), (6-7)は有効であるが、常磁性か反磁性かは必ずしも単純ではない。

表3. 有効質量因子を無視した場合のサイクロトロン運動の半径, r_c

v		$3 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$	$3 \times 10^4 \text{ ms}^{-1}$	$3 \times 10^5 \text{ ms}^{-1}$	$3 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}$	$3 \times 10^7 \text{ ms}^{-1}$
β		10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
H	10^3 Oe	1500 \AA	1.5μ	15μ	150μ	1.5 mm
	10^4 Oe	150 \AA	1500 \AA	1.5μ	15μ	150μ
	10^5 Oe	15 \AA	150 \AA	1500 \AA	1.5μ	15μ

i) $\rho_0 > r_c$ の場合

この場合の一つ，図 3(a)では常に常磁性的であるが，他の場合，図 3(c)では AB と DE の領域では中心に対し反磁性的で，BCD の領域では常磁性的である。したがって総合効果が常磁性か，反磁性かは，計算しないと判らない。

ii) $\rho_0 < r_c$ の場合

この場合は，図 3(b)に示したように常に反磁性的である。

総合効果としての常磁性，反磁性の識別は，次式

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{IS}{c} = \frac{I}{2c} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \frac{1}{2c} \oint_C \mathbf{r} \times I d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2c} \mathbf{r} \times (-e\mathbf{v}) = \frac{-e}{2m_0 c} \mathbf{r} \times (\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}) \\ &\quad (e > 0) \quad (6-10)\end{aligned}$$

を用いて計算できる。²⁶⁾ この式は基礎に取ったハミルトニアン，式(5-1)を \mathbf{H}_1 で微分して

$$\begin{aligned}\mu &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{H}_1} = -\frac{e}{4m_0 c} (-\mathbf{p} \times \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{p}) \\ &\quad - \frac{e^2}{4m_0 c^2} \mathbf{r} \times (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{r}) = \frac{1}{2c} \mathbf{r} \times (-e\mathbf{v}) \\ &\quad \left[= \frac{ev^2}{2c\omega_c} = \frac{m_0 v^2}{\hbar \omega_c} \mu_B \right] \quad (6-11)\end{aligned}$$

として得ることもできる。(式(6-11)は量子物理学的に通用するよう非可換の代数で通している。[]の中は図2の場合の古典値。)しかし，これは，いわば，偶然の産物であって，新体系物理学は，式(5-1)のハミルトニアン， \mathcal{H} の中に，軌道運動に帰因する磁気相互作用エネルギーが，

$$\mathcal{H} \sim -(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}_1) \quad (6-12)$$

の形で入っていると考えるのは全くの過まりであることを明確化している。式(6-10)に従っ

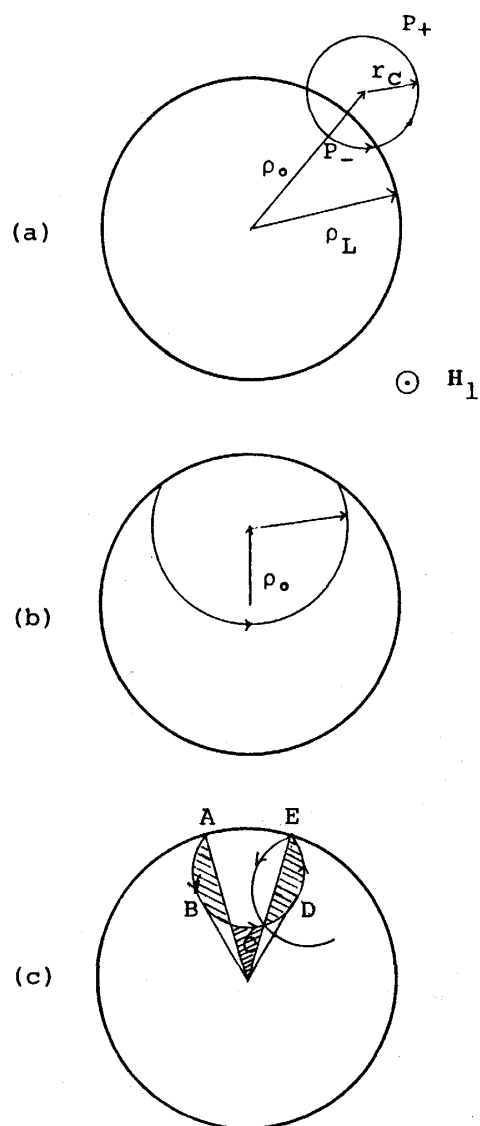


図 3. 境界電子群の二つの場合，(a)，(b)と，(a)の場合の反磁性，常磁性の分解。

て、前記(i)の場合、図3(c)に示したように、反磁性項と、常磁性項が分解され、結果は、異なる斜線で示した二つの面積の大小関係によって決まることになる。このように考えると、図2(a)に示したような、完全なサイクロトロン運動の場合も、中心に近い円弧の常磁性の寄与と、遠い円弧の反磁性の寄与との差し引きとして、反磁性項が、サイクロトロン円軌道の面積の形で残ることになる。これらの状況が後程説明する量子物理学の状態関数 ψ の中にも明瞭に反映することが予告される。なお図2、図3に於て、磁場が十分の強さであれば(a)が一般であって、(b)の場合は特殊になり、その寄与は小さいと予想される。

さて以上の古典論の準備を踏まえて、ランダウ反磁性の説明に移る。先づランダウは、その論文¹⁶⁾の最初の部分で、ランダウ・ケージで

$$\mathcal{H} = \frac{m_0}{2} v_x^2 + \frac{m_0}{2} v_y^2 + \frac{m_0}{2} v_z^2 - e\Phi \quad (6-13)$$

$$[v_x, v_y] = \frac{1}{m_0} [(p_x + \frac{e}{c} A_x), (p_y + \frac{e}{c} A_y)] = \frac{\hbar}{i} \frac{eH}{cm_0^2} \quad (6-14)$$

を得て、次に変換

$$v_x = \frac{P}{\sqrt{m_0}}, \quad v_y = \frac{eH}{cm_0 \sqrt{m_0}} Q, \quad (6-15)$$

を行うと

$$[Q, P] = i\hbar \quad (6-16)$$

になるから、こうして変換されたハミルトニアン、

$$\mathcal{H} = \frac{p_z^2}{2m_0} + \frac{P^2}{2} + \frac{1}{2} \omega_c^2 Q^2 - e\Phi \quad (6-17)$$

の、 v_x , v_y に関する部分は、自動的に調和振動子の解に等しくなるとして、

$$E^0 = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_0} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6-18)$$

を与えている。これらはエレガントに見えるけれども、境界条件を無視したものであり、(6-18) 状の解が存在することは確かであるが、§5で述べたランダウ反磁性の本質である境界電子群のことはその後の解析の問題としていることを注意しなければならない。物理的状況より推定され、後程示すように、これらの単純和は、天文学的に膨大な反磁性を与える。

さて、円柱座標を用いて式(6-13)、従って、式(5-1)のハミルトニアンを解くこととし、²⁵⁾シュレディンガーの波動関数

新体系物理学が、電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて；
原子構造，ラーモア反磁性の説明，ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬

$$\psi(\rho, \phi, z) = f(\rho) e^{ik_z z + im\phi} \quad (6-19)$$

を仮定すると、直ちに

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} - \frac{e^2 H^2}{4\hbar^2 c^2} \rho^2 + \frac{2m_0}{\hbar^2} e\Phi + \frac{2m_0}{\hbar^2} E' \right] f(\rho) = 0 \quad (6-20)$$

$$E = E' + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_0} + \frac{e\hbar m}{2m_0 c} H \quad (6-21)$$

が得られる。²⁷⁾ 式(3-17)に従い、

$$\langle l_z \rangle = \left\langle \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \right\rangle = \hbar m \quad (6-22)$$

は直ちに導出され、状態が角運動量の z 成分、 $\hbar m$ を持つ角運動量の固有状態であることを示す。²⁸⁾

ここで、古典物理学の式、(6-5)，(6-7)と合せて、

$$\hbar m \sim \frac{m_0 \omega_c}{2} (r_c^2 - \rho_0^2) \quad (6-23)$$

という対応が指摘される。²⁹⁾ m の負、正はそのまま

$$r_c \leq \rho_0 \quad (6-24)$$

となり、状況が、図2，図3の(a)の場合であるか、又は(b)の場合であるかを区別する。この対応は本質的なものであって、(b)，従って $m > 0$ の場合は、量的に重要でなくなることを予め注意する。もちろん、式(6-21)から、体系が、軌道運動に帰因する磁気能率の z 成分、 $(-m)\mu_B = \mu_{\text{orb}}$ を持ち、その磁気能率の、ゼーマン・エネルギー表現式、 $-(\mu_{\text{orb}} \cdot \mathbf{H})$ 、のエネルギーの固有値、 $m\mu_B H$ 、が導出されたと判断してはならない。²⁹⁾ 式(6-21)の最終項は、ハミルトニアンの物理的意義に従い、飽くまで電子の運動エネルギーの一部に過ぎないのである。角運動量には式(3-17)，(4-2)に従って、ベクトル・ポテンシャルから来る電磁運動量の寄与があり、³⁰⁾ それを除くと、式(6-10)，(3-17)，(6-19)より、

$$\begin{aligned} \langle \mu_z \rangle &= \iiint \psi^* \left(\frac{-e}{2m_0 c} \right) \left[l_z + \left\{ \mathbf{r} \times \left(\frac{e}{c} \frac{1}{2} \mathbf{H} \times \mathbf{r} \right) \right\}_z \right] \psi dV \\ &= \iiint \psi^* \left[-\frac{e\hbar m}{2m_0 c} - \frac{e^2 H}{4m_0 c^2} \rho^2 \right] \psi dV \end{aligned} \quad (6-25)$$

が導出される。従って、

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } m < 0 \quad 0 \leq \rho < \lambda \sqrt{-2m} \text{ で常磁性電流,} \\ \quad \quad \quad \rho > \lambda \sqrt{-2m} \text{ で反磁性電流.} \\ \text{ii) } m > 0 \quad \text{すべて反磁性電流.} \end{array} \right\} \quad (6-26)$$

$$\lambda = \lambda_H = \sqrt{\frac{\hbar c}{eH}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m_0 \omega_c}} = 811 \times \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \text{ \AA} \quad (6-27)$$

となる。 λ_H は長さの次元を持つ重要な定数で、

$$H = 10^3 \kappa \text{ Oe} \quad (6-28)$$

として、式(6-27)のようにオングストローム単位で与えられる。

さて量子物理学では古典物理学と異なり、解の重畳が許されると共に、その固有解は、系の対称性を反映したものになる。解 i) は図 2, 3 の(a)を軸対称に重畳したものを、又解 ii) は、その(b)の古典解を軸対称に重畳したものと考えられることは明らかである。新体系物理学は、この重畳を古典状態のアンサンブルとして意識的に考える。従って、 $\sqrt{-2m} \lambda$ は図 3(c)の B 又は D の位置の動径 ρ に対応すると推定される。

式(6-19)を仮定し、式(6-20)が導出されたことによって、 $f(\rho)$ は実関数となる。この事は ρ の動径方向に、電子の速度が確定値を持つことはないことを示している。この事実も又、上記の電流と同様、多数箇の古典状態を軸対称に重畳した結果として、自然に理解される。しかしながら、この事は、式(6-19)で示される量子物理学の固有状態 ψ には、動径方向の速度の成分が無いということではない。このことは既に原子の波動関数 ψ_{nlm} (式(3-1)) に於て、式(3-35)に示されるように、同様な状況のもとで、有限の動径方向の運動エネルギー成分を得ていることから明白である。その定量評価は後程与えられる。

さて、まず式(6-20)を解くことにする。題意から明らかに物理的に意義のある $\rho = 0$ に特異性がない筈で、これは x, y で Taylor 展開が可能で、従って ρ の冪級数に展開できることを意味するものである[†]。さて

$$f(\rho) = e^{-\frac{1}{4}(\frac{\rho}{\lambda})^2} g(\rho) \quad (6-29)$$

とおく。そうすると $m_0 \omega_c / \hbar = \lambda^{-2}$ を注意して

$$g'' + g' \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{\lambda^2} \right) + g \left(\frac{2m_0 E'}{\hbar^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} e\Phi - \frac{m^2}{\rho^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) = 0 \quad (6-30)$$

[†] 円柱座標を使うと円柱座標特有の特異性が $\rho = 0$ に現れるがこれは見掛け上であって、真性特異点ではなく、 ρ の偶関数を要求する必要はない。(例 $x = \rho \cos \phi$)

新体系物理学が、電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて；
原子構造，ラーモア反磁性の説明，ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬

が得られる。これで ρ の次数が 2 種類に整理されたので、

$$g(\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \rho^{s+i}, \quad a_0 \neq 0, \quad s \geq 0 \quad (6-31)$$

とすると、容易に

$$a_0 [s^2 - m^2] = 0, \quad s = \pm m = |m| \quad (6-32)$$

$$a_1 [(s+1)^2 - m^2] = 0, \quad a_1 = 0 \quad (6-33)$$

$$j \geq 1, \quad a_{2j} = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{(|m| + 2j - 1) - \frac{2E'}{\hbar\omega_c}}{4(|m| + j^2)} \cdot a_{2(j-1)} \quad (6-34)$$

が得られる[#]。 $g(\rho_L) = 0$ でなくてはならないから、 $a_{2j} (j \geq 0)$ がすべて同一符号では解にならない。従って、ある $j \geq 1$ に関して

$$(|m| + 2j - 1) - \frac{2E'}{\hbar\omega_c} < 0 \quad (6-35)$$

が必要である。従って、必要最小限の条件 $j = 1$ を入れて

$$E' > \hbar\omega_c \left(\frac{|m| + 1}{2} \right) \quad (6-36)$$

が導出される。従って (6-21) と合せて

$$E > \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_0} + \hbar\omega_c \left(\frac{|m| + m}{2} + \frac{1}{2} \right) \quad (6-37)$$

である。すなわち

$$\text{i) } m < 0, \quad E > \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_0} + \hbar\omega_c \left(\frac{1}{2} \right) \quad (m = -1, -2, \dots) \quad (6-38)$$

$$\text{ii) } m \geq 0, \quad E > \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_0} + \hbar\omega_c \left(m + \frac{1}{2} \right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (6-39)$$

が得られる。(6-18) 式との差は、 $g(\rho_L) = 0$ の境界条件の結果である。ここで i) と ii) は今まで通り、図 2, 3 の(a), (b)に対応する。(6-21)に現れたゼーマン・エネルギー形式の項は消えている。

さて、一定の m について、 E' を (6-36) の最低値にとると、 $g(\rho)$ は $a_0 \rho^{|m|}$ となり、式

[#] $s = |m|$ は円柱座標として $\rho = 0$ が正則であるための条件であり、一般に現われる。

(6-29) の $f(\rho)$ は ρ の全域で同符号で、0 又は a_0 より出発して、 $\rho \rightarrow \infty$ で零になる。 E' を徐々に増加させると、後程詳しく説明するように、最初 ∞ にあった零の位置が、有限の ρ の値に下り、それと共に関数 f は無限遠では

$$a_0 e^{\frac{1}{4}(\frac{\rho}{\lambda})^2} \quad (6-40)$$

に近接して無限大になる。更に $j = 2$ とおいて、式 (6-35) が零、即ち

$$E' = \hbar \omega_c \left(\frac{|m| + 3}{2} \right) \quad (6-41)$$

で再び、無限遠に零が現れ、 E' を更に増加させると、その零が再び、有限域に下ると共に無限遠で式 (6-40) に近接し、以下同様に繰返す。従って無限遠が零になるのは

$$E' = \hbar \omega_c \left(\frac{|m| + 2n + 1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6-42)$$

であって、関数 f は、その E' が、

$$\hbar \omega_c \frac{|m| + 2n - 1}{2} < E' < \hbar \omega_c \frac{|m| + 2n + 1}{2} \quad (6-43)$$

にある時、 $0 < \rho < \infty$ の間に、零を n 箇所持っている。従って、境界条件 $f(\rho_L) = 0$ は、この n 箇の零のどれかを利用することになる。

さて、(3-23) の考え方で

$$h(\rho) = \sqrt{2\pi\rho} f(\rho) \quad (6-44)$$

とおいて、 $h(\rho)$ を規格化する。その方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} h'' + \frac{\hbar^2}{2m_0} \left\{ \left(m^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{\lambda^4} \right\} h = E' h \quad (6-45)$$

である。われわれは既に (6-42) の場合、無限遠で零になることを知っている。従って、単純化のため、そう仮定して、それらの関数を調べる。

さて、式 (6-45) は一見して、そのポテンシャルに極小があり、 $m = 0$ なら $\rho = 0$ 、 $m \neq 0$ なら

$$\rho_M = \lambda (4m^2 - 1)^{\frac{1}{4}} \sim \lambda \sqrt{2|m|} \quad (6-46)$$

で極小になる。従って関数は一般にその極小点の附近に集中し、 n の増大と共にその前後に広がってゆくものと予想される。式 (6-26) の値が、(6-46) に現れたことは偶然ではない。

新体系物理学が、電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて；
原子構造，ラーモア反磁性の説明，ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬

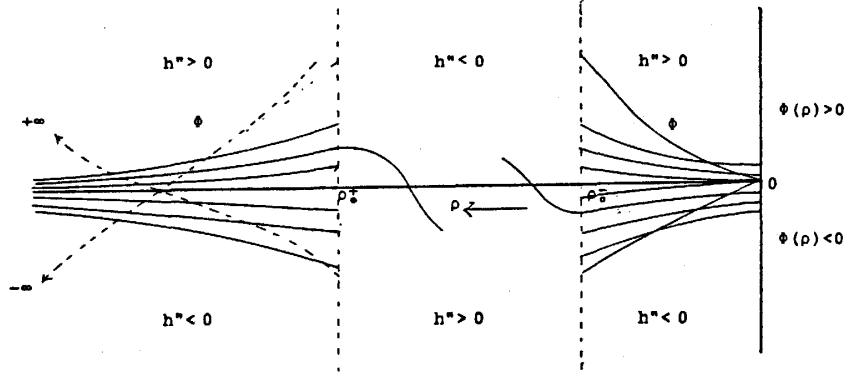


図 4. $h(\rho)$ の一般的な挙動を示す図。実線はあり得る場合，点線は $\rho > \rho_0^+$ で零を切り $\pm\infty$ に発散する場合。

式 (6-42) を実際，式 (6-45) に代入すると

$$h'' = \left\{ \left(m^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{4\lambda^4} - \frac{1}{\lambda^2} (|m| + 2n + 1) \right\} h \quad (6-47)$$

が得られる。従って， h の係数を $\phi(\rho)$ とすると， $\phi(\rho)$ は

$$\rho_0^\pm = \lambda \left[2(|m| + 2n + 1) \pm \sqrt{16 \left\{ |m| \left(n + \frac{1}{2} \right) + n(n + 1) + \frac{5}{16} \right\}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6-48)$$

で零となり，その間で負の値，又その外側では常に正の値を取ることが判る。式 (6-47) から， $h(\rho)$ 曲線の変曲点は ρ_0^\pm と， $h = 0$ の点だけで， h'' の正負は図 4 のように決まり， $\rho \rightarrow \infty$ で $h(\rho) = 0$ である。又 $\rho \rightarrow 0$ で $h(\rho) = a_0$ か， $a_0 \rho^{|m|}$ ， $|m| \geq 1$ である。そうすると，図 4 に示したように， $\rho > \rho_0^+$ と， $\rho_0^- > \rho \geq 0$ の二つの領域で， $h = 0$ は原理的にあり得ない。従って，式 (6-43) で述べた n 箇の零は，すべて

$$\rho_0^- \leq \rho \leq \rho_0^+ \quad (6-49)$$

の間に存在しなければならないことが判る。もちろん，これらの零点は，同時に変曲点となり，正弦曲線に近い振動曲線を形成する。更に後程，大部分の電子に就いて

$$n \ll |m| \quad (6-50)$$

と仮定することになるので，そう考えると，式 (6-48) から

$$\rho_0^\pm = \lambda \left[\sqrt{2|m|} \pm \sqrt{2n} + \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{|m|}} \right] \quad (6-51)$$

飯田修一

が導出され、関数は従って、略々

$$\rho = \sqrt{2|m|} \lambda \quad (6-52)$$

を中心として、前後に

$$\sqrt{2n} \lambda \quad (6-53)$$

の拡がりを持ち、その零点間の平均間隔は $2\sqrt{2} \lambda / \sqrt{n}$ であって、 $|m|$ に依存しないことが判る。さて

$$p_\rho = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{d\rho} \quad (6-54)$$

と考へて、ビリアル定理を応用すると、

$$\left\langle \frac{p_\rho^2}{2m_0} \right\rangle_{m, n'} = \left\langle \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(m^2 - \frac{1}{4} \right) \left(-\frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{\hbar^2}{8m_0} \frac{\rho^2}{\lambda^4} \right\rangle \quad (6-55)$$

である。又式(6-42)から

$$\left\langle \frac{\rho_\rho^2}{2m_0} \right\rangle_{m, n'} + \left\langle \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(m^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\rho^2} + \frac{\hbar^2}{8m_0} \frac{\rho^2}{\lambda^4} \right\rangle_{m, n'} = \hbar \omega_c \left(\frac{|m| + 2n + 1}{2} \right) \quad (6-56)$$

従って

$$\left\langle \frac{\hbar^2}{4m_0} \frac{\rho^2}{\lambda^4} \right\rangle_{m, n} = \hbar \omega_c \frac{|m| + 2n + 1}{2} \quad (6-57)$$

$$\left\langle \rho^2 \right\rangle_{m, n} = \lambda^2 \cdot 2(|m| + 2n + 1) \quad (6-58)$$

が得られる。従って、 ρ^2 の期待値も、ポテンシャルの極小点 ρ_M (式(6-46)) に近く、 n と共に大きくなる。更に(A-4)式(附録)を適用すると、

$$\left(m^2 - \frac{1}{4} \right) \left\langle \frac{1}{\rho^3} \right\rangle = \frac{1}{4} \frac{\langle \rho \rangle}{\lambda^4}, \quad \langle \rho \rangle = (4m^2 - 1) \left\langle \frac{\lambda^4}{\rho^3} \right\rangle \quad (6-59)$$

が得られる。

次に式(6-21)を使って方程式(6-45)を

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{d\rho^2} + \left\{ \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(m^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\rho^2} + \frac{e^2 H^2}{8m_0 c^2} \rho^2 \right\} + \frac{e\hbar m H}{2m_0 c} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_0} \right] \psi = E \psi \quad (6-60)$$

新体系物理学が、電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて；
原子構造，ラーモア反磁性の説明，ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬

と変形し，パラメター m に関して，ファインマンの定理を適用する。上式のハミルトニアンを \mathcal{H} として

$$E_{m,n} = \hbar \omega_c \left(\frac{|m| + m}{2} + n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_0} \quad (6-61)$$

であるから

$$m < 0, \quad 0 = \frac{\partial E_{m,n}}{\partial m} = \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m} \right\rangle = \left\langle \frac{\hbar^2}{m_0} \frac{m}{\rho^2} + \frac{e \hbar H}{2m_0 c} \right\rangle \quad (6-62)$$

$$m > 0, \quad \hbar \omega_c = \left\langle \frac{\hbar^2}{m_0} \frac{m}{\rho^2} + \frac{\hbar \omega_c}{2} \right\rangle \quad (6-63)$$

である。なお $\hbar \omega_c = \hbar e H / m_0 c$ である。両式から

$$\left\langle \frac{1}{\rho^2} \right\rangle = \frac{1}{2|m|\lambda^2} \quad (6-64)$$

という，単純な関係が得られる。従って式(6-56)より，動径方向の運動エネルギーは

$$\left\langle \frac{p_\rho^2}{2m_0} \right\rangle_{m,n} = \frac{\hbar^2}{2m_0 \lambda^2} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{8|m|} \right) = \hbar \omega_c \left(\frac{n}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16|m|} \right) > 0 \quad (6-65)$$

と計算される。この値が，殆んど m に依存しないことは， n の解釈から当然である。

さて， ρ の平均偏差の二乗の期待値

$$\langle [\rho - \langle \rho \rangle]^2 \rangle = \langle \rho^2 \rangle - (\langle \rho \rangle)^2 \quad (6-66)$$

は， $\langle \rho \rangle$ の計算に帰着する。ところで $\langle \rho^2 \rangle$ は ρ の大きいところ， $\langle 1/\rho^2 \rangle$ は ρ の小さいところが強調されている筈である。 $\langle \rho \rangle$ は従って，その中間程度と考えられる。従って

$$\langle \rho \rangle \sim \lambda [(2|m| + 2n + 1)]^{\frac{1}{2}} \quad (6-67)$$

と仮定すると，

$$\langle [\rho - \langle \rho \rangle]^2 \rangle \sim \lambda^2 (2n + 1) \quad (6-68)$$

が得られて，中心点 $\langle \rho \rangle$ から

$$\pm \sqrt{2n + 1} \cdot \lambda \quad (6-69)$$

程度の拡がりを持ち，式(6-53)と一致する。従って，式(6-51)の ρ_0^+ が，境界 ρ_L に近接

しない限り, $\rho_L = \infty$ を仮定しても大差はない。 $\lambda = \lambda_H$ は式 (6-27) で与えられるから, $H = 1 \text{ kOe}$ として, $\rho_L = 5 \text{ mm} = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$ とすると

$$\frac{\rho_L}{\lambda} \sim \frac{5 \times 10^{-3} \text{ m}}{8 \times 10^{-8} \text{ m}} \sim 6 \times 10^4 \quad (6-70)$$

である。従って, 式 (6-67) から, 桁数で,

$$(2|m|, 2n) \sim 4 \times 10^9 \quad (6-71)$$

になると, 境界の影響を考えねばならなくなることが推定される訳である。

図5に $(n-m)$ 平面上に, 固有状態の分布を示す。この場合のエネルギー固有値 $E_{m,n}$ は, 式 (6-61) に示される。もちろんこれは運動エネルギーである。見られるように $m > 0$ と $m < 0$ で大きく異なり, $m < 0$ では, $E_{m,n}$ は m に無関係となる。 $m > 0$ では $m+n$ に比例する。従って, $E_{m,n}$ の値で見る限り, その一定の線は $m > 0$ では図に示される

$$m = -n + \text{const} \quad (6-72)$$

の線で, $m < 0$ では m 軸に平行な直線となる。

この近似で, $E_{m,n}$ を通常の熱エネルギーの常識

$$E_{m,n} = \hbar \omega_c \left(n' + \frac{1}{2} \right) = kT \quad (6-73)$$

$$n' = \frac{|m| + m}{2} + n \quad (6-74)$$

とおくと, 式 (6-28) を使用して, $T = 300 \text{ K}$ として

$$n' + \frac{1}{2} \sim \frac{kT}{\hbar \omega_c} = 2.4 \times \frac{10^3}{\kappa} \quad (6-75)$$

といった値になる。一方電子の箇数を $8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ とすると

$$(4.4 \times 10^9)^3 \text{ m}^{-3} = (4.4 \times 10^7)^3 \text{ cm}^{-3} \quad (6-76)$$

であって, 1 cm^3 の体積を考えると, 二次元の自由度の中に,

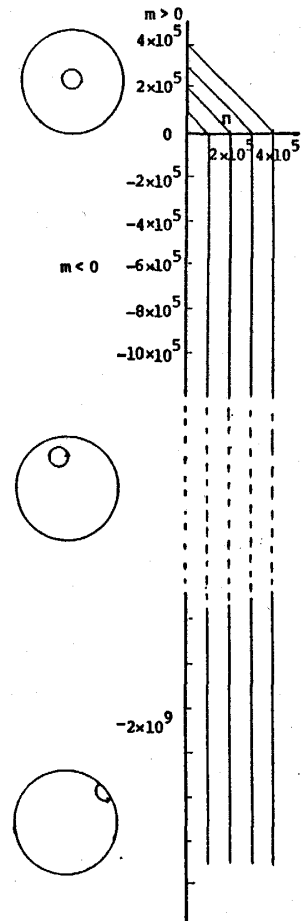


図5. n, m で指定された電子の状態の分布を $n-m$ 平面上で示したもの。図の示された分布域は, 従来の考え方に従ったものである。新体系物理学では, この分布は意味がなくなる。

$$(4.4 \times 10^7)^2 \sim 2 \times 10^{15} \quad (6-77)$$

の固有状態が必要で、スピンを考えると、 $n-m$ 平面上に約 10^{15} ケの状態が必要である。従って、(6-75) の n' は問題にならず、フェルミ分布の為、運動エネルギーは、 kT の遥かに上にあると予想される。式(6-74)から、 $m < 0$ の状態に関する限り、そのエネルギーは m に依存せず、従って、解の存在する限り、その極限まで詰ると予想される。もちろん $|m|$ を増大させることは、図2，3の $\rho_0 \rightarrow \rho_L$ であって、その限界は式(6-51)の ρ_0^- が、 ρ_L に近接する m の値であろう。これは式(6-70)，(6-71)によって、

$$|m| \sim 2 \times 10^9 \quad (6-78)$$

であり、その結果 n は式(6-77)より、 $n-m$ 平面で 5×10^5 の値が必要になる。これは式(6-75)に於て、1 kOe に対し、 2×10^2 倍の運動エネルギー、フェルミ・エネルギーとして数 eV の値まで、電子を詰めることが必要という答である。

こうして $n-m$ 平面上で、図5に示すように $m > 0$ は極く僅かであり、圧倒的多数は $m < 0$ にあること、その際

$$0 < n \lesssim 5 \times 10^5 \quad (6-79)$$

$$0 < (-m) \lesssim 2 \times 10^9 \quad (6-80)$$

であることが判る。

さて、以上のように全貌を見せてきた (n, m) で指定される固有状態の物理的状況について説明しよう。すでに度々述べて来たように、 $m < 0$ が、図2，図3の(a)の場合であって、 $m > 0$ が、図2，図3の(b)の場合である。この事は式(6-25)，(6-26)の解釈と勿論一致する。従って、この最も重要な $m < 0$ の場合

$$0 \leq \rho < \lambda \sqrt{-2m} \quad (6-81)$$

で常磁性電流を、

$$\sqrt{-2m} \lambda < \rho \quad (6-82)$$

で反磁性電流を与え、境界 ρ_L が、何れの箇所にあるかで、その全体効果が決定する。なお境界条件 $h(\rho_L) = 0$ は、 $h_{m,n}(\rho)$ が持つ、 n ケの零のどれかに一致すればよく、この解は、

式(6-61), (6-60)に於て, n を整数に限定せず, ± 1 程度の調整を行うことにより, 容易に満足させられる。

さて, 境界の影響が無視できるところでは, 軌道運動磁気能率は, 式(6-25), (6-58), (6-61)により,

$$\begin{aligned}
 \langle \mu_z \rangle &= -m\mu_B - (|m| + 2n + 1)\mu_B \\
 &= -(m + |m| + 2n + 1)\mu_B \\
 &= -\frac{E_{m,n} - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_0}}{\frac{\hbar\omega_c}{2}}\mu_B
 \end{aligned} \tag{6-83}$$

であって, xy 面内の運動エネルギーに比例し, 式(6-21), (6-25)に現れた m の役割は消失し, 式(6-11)の括弧に示される古典値と厳密に一致する。又式(6-83), (6-79)から, 境界に関係しない電子群の大部分は, 強磁性体中の原子の磁気能率の 10^5 倍といった圧倒的に大きい反磁性磁気能率を持つことになる。境界電子群は, 式(6-25)の磁気能率が

$$+|m|\mu_B - \frac{1}{2}\langle \frac{\rho^2}{\lambda^2} \rangle \mu_B \tag{6-84}$$

であって, これらが境界 $\rho \sim \rho_L$ 附近にあり, 更に式(6-51)の括弧を考慮して,

$$\frac{\rho_L^2}{\lambda^2} \geq \langle \frac{\rho^2}{\lambda^2} \rangle \gtrsim \frac{(\rho_L - 2\sqrt{2n} \cdot \lambda)^2}{\lambda^2} \tag{6-85}$$

とすると, 式(6-70), (6-79)から

$$2 \times 10^9 \gtrsim \frac{1}{2} \langle \frac{\rho^2}{\lambda^2} \rangle \gtrsim 2 \times 10^9 - 2 \times 10^8 \tag{6-86}$$

となる。従って, 常磁性磁気能率は, 更に巨大であって, $+10^8 \mu_B$ といった膨大な値も期待される。

さて, ここで, 式(6-11)に従って,

$$\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H_1} \quad \therefore \langle \mu \rangle = -\frac{\partial}{\partial H_1} \langle \mathcal{H} \rangle \tag{6-87}$$

は, 新体系物理学の立場でも期待される。式(6-73)から,

$$\mu = -\frac{\partial}{\partial H} \left[\hbar\omega_c \left(\frac{|m| + m}{2} + n + \frac{1}{2} \right) \right] \tag{6-88}$$

である。 ω_c は式(6-1)に与えられるから, もし境界がなければ,

新体系物理学が、電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて；
原子構造，ラーモア反磁性の説明，ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬

$$\mu_z = -\frac{\hbar e}{2m_0 c} (|m| + m + 2n + 1) \quad (6-89)$$

であって、式(6-83)と一致する。境界条件を入れると、前述のように n が、 H に依存することになり、

$$\mu_z = -\frac{\hbar e}{2m_0 c} (|m| + m + 2n + 1) + \frac{\hbar e H}{m_0 c} \left(-\frac{\partial n}{\partial H} \right) \quad (6-90)$$

が得られる。式(6-45)で H を増大させると、式(6-27)に従って、 λ が減少し、式(6-46)の ρ_M が減少して、従って零点は一般に原点に近づく。ところで、 H を一定として、 E' 、従って n を増大させると、零点が無限遠から、原点に近づいてくる。従って、 $\rho^* = \rho_L$ にある関数の零点が、 H の増大により、 $\rho^* < \rho_L$ になったものを、元に戻すためには、 n を減少させなければならない。従って

$$\frac{\partial n}{\partial H} < 0 \quad (6-91)$$

であって、(6-84)式と合せて、

$$\frac{\hbar e H}{m_0 c} \left(-\frac{\partial n}{\partial H} \right) = (2|m| + m + 2n + 1) \mu_B - \frac{1}{2} \left\langle \frac{\rho^2}{\lambda^2} \right\rangle \mu_B \quad (6-92)$$

となる。

こうした膨大な反磁性および常磁性磁気能率を伴う非常な状況が、電気抵抗が有限である常電導体内で起っている筈がないというのが、新体系物理学の一つの結論である。表3に示すようにサイクロトロン半径 r_c は、 $H \sim 1 \text{ kOe}$ として、 $3 \times 10^3 \sim 6 \text{ ms}^{-1}$ の速度の電子に対し、 $1,500 \text{ \AA} \sim 150 \mu$ となる。こうした長い距離を常電導電子が、コヒーレントに動くことは不可能である。上記の取扱いは更に、巨視的な試料の円周全体に互って相関する $\psi(r, \theta, \phi)$ を仮定している。これらは基本的に間違っていて、このような長い距離に互ってコヒーレントな波動関数は、超電導体でしか実現できない。そして、超電導体のように量子力学的永久電流を維持できる体系の場合、熱統計力学の内部エネルギーとして用いることの出来るものは $E_{m,n}$ ではなく、更にこれに外場磁場 H_1 との相互作用の磁気エネルギー、式(5-5)，(5-6)を加えたものになることが、新体系物理学の結論^{1), 2)}であり、その結果、膨大な常磁性磁気能率を持つ境界電子群は、 $+10^1 \sim 2 \text{ eV}$ という膨大な磁気エネルギーを伴うことになり、それらは急速に消滅して、反磁性状態の電子に移り、その結果、磁束は急速に内部より押し出されて、マイスナー状態に遷移してゆく。この変化は磁場中で常電導体を冷却して超電導体とした際に発生する変化と、稍類似する。

常電導体が、マイスナー効果を示すことが出来ない理由は、常電導体は、ヴァン・リューエンや、ランダウが、その金属内電導電子の反磁性の際に仮定したような、ポテンシャルの容器中に閉じこめられた完全な自由電子ガスを持たず、金属イオン結晶格子の中で、結晶格子により、常に熱擾乱散乱を受けて居り、巨視的な電流を維持できず、従って、本解説で考えたような m , n の巨大な、従って反磁性、もしくは常磁性の巨大な磁気能率を持つ電子状態が本質的に出来ない系になっているのである。従って、超電導体のように、試料の表面全体に量子電流の流れる状況も出現できず、あたかも、ランダウ達の取扱いが、正当であったかのような、弱反磁性の状況も実験的に現れ得たのである。

さて、このような状況のもとで、ランダウ反磁性の計算をこれ以上進めることは意味がなくなった訳である。しかしながら、いわゆる権威と称せられる人達の業積であって、長い間、世界中の他の権威者達も信じて来た、所謂、物理学の常識を打破するのには、それ相当の、昔の人達の努力の内容を知ること必要であろうし、又、その努力の内容が、多少の修正の結果、ある種の物理学的意義を発見出来る可能性がないだろうかという検討も行う必要があると考える。従って、次章で、以上の解析結果を踏まえて、ランダウ反磁性の計算方法の詳細と、その物理的評価を与える。

§7. ランダウの反磁性の解析, II ; 熱統計とその評価

ランダウの反磁性の取り扱いは、既に見たように膨大な反磁性と、膨大な常磁性の差し引き勘定であって、余程旨くやらないと何をやっているのか判らなくなつて了う。しかし、もともとはヴァン・リューエンの考え方にに基づき、零磁化であるべき体系に、量子力学の結果としての境界電子群の相殺の不完全性から、何等かの反磁性が残って良い筈という考え方に基づいている。

さてヴァン・ブレックによる取り扱いは次の形式による。²⁷⁾ 円柱対称性を仮定し、その一電子のエネルギーとして、式(6-61)を採用する。そうして、 $m > 0$ は、サイクロトロン運動が、円柱軸を囲む特殊な場合であり、関係する電子群は少数であると考えて無視する。そうすると実効エネルギーは

$$E_{m,n}^0 = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (7-1)$$

となる。このエネルギーの状態が、 $m = -1$ から式(6-23)もしくは(6-64)に基づく m の値、すなわち、

新体系物理学が、電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて；
原子構造，ラーモア反磁性の説明，ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬

$$m = -\frac{1}{2} \left(\frac{\rho_L}{\lambda} \right)^2 = -\frac{1}{2} \frac{\rho_L^2 e H}{\hbar c} \quad (7-2)$$

までの値を取れるものとする*。それ以上の m の値の状態は，零点の ρ が， ρ_L 以上となり，境界条件を満足させ得ないと結論する訳である。そうした上で，フェルミ分布の代りに，ボルツマン分布を仮定する。この点は，計算の便宜上であって，フェルミ分布にしても，結果は大同小異になる。そうすると状態和は

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{m=-1}^{2 \frac{\hbar c}{\rho_L^2 e H}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c / kT} \\ &= \frac{\rho_L^2 e H}{2 \hbar c} \frac{e^{-\hbar \omega_c / 2 kT}}{1 - e^{-\hbar \omega_c / kT}} = \frac{\rho_L^2 e H}{4 \hbar c} \frac{1}{\sinh(\hbar \omega_c / 2 kT)} \end{aligned} \quad (7-3)$$

である。これは一電子に関するものであるから，単位体積の電子の数 N_0 を掛けて，単位体積の自由エネルギー F は

$$F = N_0 (-kT \ln Z) \quad (7-4)$$

磁化 M は (6-87)，(6-88) の関係を信頼して，

$$\begin{aligned} M &= -\frac{\partial F}{\partial H} = N_0 \left(+kT \cdot \frac{\partial \ln Z}{\partial H} \right) = -N_0 \mu_B \left[\coth \frac{\mu_B H}{kT} - \frac{kT}{\mu_B H} \right] \\ &= -N_0 \mu_B L(\mu_B H / kT) \end{aligned} \quad (7-5)$$

が得られる。ここに， $L(\mu_B H / kT)$ はランジュバン関数である。 $H \rightarrow 0$ とすると帯磁率を χ として

$$M = -\frac{N_0 \mu_B^2 H}{3 kT}, \quad \chi = -\frac{N_0 \mu_B^2}{3 kT} \quad (7-6)$$

が，得られる。これがいわゆるランダウの反磁性帯磁率である。¹⁶⁾ 特に注意すべき点は，境界域常磁性電子群よりの常磁性の寄与を，単に式 (7-2) により， $|m|$ の最高値を， H に依存した値で制限していることだけにより，取り入れたと考えていることで，常磁性を計算せず，反磁性電子数の減少として， $1/H$ の項として，結果に現れる。この間接的方法による常磁性電子の寄与の計算方法については，多く討議されたところであるが，熱力学エネルギーを，式 (7-

* ρ_L は正確に §6 の ρ_L である必要はない。

1) で定義する限り正しいものと認められている。しかし疑点が残る。これらの疑念を解消させる証明が、ダーウィンにより与えられた。いまからそれを説明する。

ダーウィン²²⁾は、 $\rho = \rho_L$ で無限大のポテンシャルの壁を設定する代りに、式(6-20)の形に着目し、

$$-e\Phi = \frac{B}{2}\rho^2 \quad (7-7)$$

として、拋物線状のポテンシャルの谷を考え、熱統計を完全に行って後、 $B \rightarrow 0$ に持ってゆく場合を研究した。式(6-20)でこのことは

$$\frac{e^2 H^2}{4 \hbar^2 c^2} = \frac{1}{4 \lambda^4} \rightarrow \frac{1}{4 \lambda^4} + \frac{m_0 B}{\hbar^2} \quad (7-8)$$

になることを意味する。従って

$$\lambda^2 \rightarrow \frac{\lambda^2}{\left[1 + \frac{4 \lambda^4 m_0 B}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\lambda^2}{\left[1 + \frac{4 m_0 c^2 B}{e^2 H^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (7-9)$$

$$\hbar \omega_c = \frac{\hbar^2}{m_0} \frac{1}{\lambda^2} \rightarrow \hbar \omega_c \left[1 + \frac{4 m_0 c^2 B}{e^2 H^2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (7-10)$$

といった変換を行えばよい。もちろん、式(6-21)は

$$E = E' + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2 m_0} + \hbar \omega_c \frac{m}{2} \quad (7-11)$$

であって、この $\hbar \omega_c$ は $(-e\Phi)$ の値に関係しない。しかし、式(6-42)の $\hbar \omega_c$ は式(7-10)の変換を受ける。結局式(6-61)の $E_{m,n}$ は、

$$E_{m,n} = \hbar \omega_c \left\{ \frac{m}{2} + \left[1 + \frac{4 m_0 c^2 B}{e^2 H^2}\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|m|}{2} + n + \frac{1}{2} \right) \right\} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2 m_0} \quad (7-12)$$

となる。(6-91)式で問題にした境界電子群の n の H 依存性は、式(7-12)に見事に表現されていると言える。その係数は H と共に減少し、期待された通りの形である。

さてこの $E_{m,n}$ を使って熱統計に入る。再び単純化のためボルツマン統計を使用すると、一電子の分配関数 Z は

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{m,n} e^{-E_{m,n}/kT} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\hbar \omega_c (\frac{m}{2} + b \frac{|m|}{2})/kT} \cdot \sum_n e^{-\hbar \omega_c b (n + \frac{1}{2})/kT} \\ &= \frac{e^{\alpha}}{[e^{(b+1)\alpha} - 1][1 - e^{-(b-1)\alpha}]} \end{aligned} \quad (7-13)$$

新体系物理学が、電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて；
原子構造，ラーモア反磁性の説明，ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬

$$b = \left[1 + \frac{4 m_0 c^2 B}{e^2 H^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha = \frac{\mu_B M}{kT} = \frac{e \hbar H}{2 m_0 c kT} \quad (7-14)$$

を得る。この計算では相互作用無視の点は残るが，境界電子群の処置に関しては完全である。
従って磁化 M は

$$M = N_0 kT \frac{\partial}{\partial H} \ln Z = N_0 kT \frac{\partial}{\partial H} \frac{e^\alpha}{[e^{(b+1)\alpha} - 1][1 - e^{-(b-1)\alpha}]} \quad (7-15)$$

である。更に

$$b = \sqrt{1 + \frac{4 B m_0 c^2 \mu_B^2}{e^2 (kT)^2 \alpha^2}}, \quad \frac{\partial b}{\partial \alpha} = -\frac{4 B}{m_0 \omega_c^2} \frac{1}{\alpha b} \quad (7-16)$$

$$kT \frac{\partial}{\partial H} = \mu_B \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial b}{\partial \alpha} \alpha + b = b^{-1}$$

などを使って計算すると，

$$M = -N \mu_B \frac{\frac{1}{6} \alpha (b^2 - 1) + \frac{1}{5!} \alpha^3 (b^4 - 1) + \dots}{\frac{1}{2} (b^2 - 1) + \frac{1}{4!} \alpha^2 (b^4 - 1) + \dots} \quad (7-17)$$

となり， $H \rightarrow 0$ の附近で， $b \rightarrow 1$ に近接させると

$$M \sim -\frac{N_0 \mu_B^2 H}{3 kT} \quad (7-18)$$

となり，ランダウの反磁性項が見事に導出される。

ここで，式 (7-17) の b の中には H が入っているから，その効果を見るため更に詳しく検討して見ると，

$$M = -\frac{N_0 \mu_B^2 H}{3 kT} \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{3}n + 1\right)(2n+2)!} \left\{ \frac{B \hbar^2}{m_0 (kT)^2} \right\}^n}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+2)!} \left\{ \frac{B \hbar^2}{m_0 (kT)^2} \right\}^n} \quad (7-19)$$

となる。 $(2/3)n + 1 > 1$ であるから， $B \neq 0$ の場合，境界電子群の常磁性項が増大し，反磁性帯磁率は絶対値が減少する。 $B \rightarrow \infty$ で $\chi \rightarrow 0$ であろうから，これは当然である。

さて新体系物理学は，以上の計算が，磁性の熱統計計算であるにも拘らず，体系の磁気エネルギーが，どこにも見当らず，単に運動エネルギーに関して，熱統計を加えただけである点，根本的に過まっていると結論する。これらの計算に於て採用された量子物理学的前提は，理想化された完全自由電子の近似であって，その仮定のもとに立つ限り，巨視的永久電流の存在可能な形式であり，もし，境界電子の量子状態が，式 (6-79) に従って，フェルミ面の近くの電

子であり、数 eV の運動エネルギーを持っているものとする、その速度 v は 10^6 m/s の附近であって、式 (5-6) に従って、その正の磁気エネルギーは 10^2 eV といった膨大なものになる。このエネルギーは、もちろん、式 (6-61) の $E_{m,n}$ には含まれていない。最も単純な場合、すなわち、試料 C_2 が、ランダウ反磁性である場合を出発状態として、もし、上記の 10^2 eV の常磁性電子の多数の状態が、熱擾乱効果によって、反磁性電子の状態に変換したとすると、文献 1), 式 (39)³¹⁾ に従って、印加磁場の源、 C_1 に向って、電磁エネルギーを伴う電磁波が、

$$\delta W_1 = -\delta U_{m12} = \delta [-(\mu_2, \mathbf{H}_1)] \quad (7-20)$$

の形式で発射される。 U_{m12} は上記の C_2 と C_1 間の磁場の相互作用エネルギーであり、 μ_2 は C_2 の全磁気能率である。 δW_1 はそのシグナルが、 C_1 に到着した際、電磁的になされる仕事であって、今の場合、

$$\delta W_1 = -\delta U_{m12} \sim 10^2 \text{ eV} \times (\text{電子数}) \quad (7-21)$$

といった膨大なものになる。又同時に、その式 (40)³²⁾

$$-\iiint_{V_2} \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \delta \mathbf{E}_2 \cdot (\mathbf{j}_2^0 + \delta \mathbf{j}_2) dt dV = \delta U_{m22} + \delta U_R \quad (7-22)$$

によって、試料 C_2 の反磁性磁気能率が増加した分だけ、上昇した自分自身の磁気エネルギー、 δU_{m22} の上昇に見合うだけ、試料自身から、その電磁氣的でないエネルギー、すなわち、この場合、電子群の運動エネルギーが減少する。その際、運動エネルギーの減少に伴う、体系のエントロピー減少との競合が発生する。この競合の勝敗を決定するのが、遷移エネルギー原理³³⁾であって、不可逆過程発生の方向を

$$[\text{TE}] + T\delta S > 0 \quad (7-23)$$

と規定する。“遷移エネルギー” (Transient Energy) $[\text{TE}]$ は、この場合 $-\delta U_{m12} = \delta W_1$ である。エントロピーの減少、 $T\delta S$ は、式 (7-22) に従う運動エネルギーの減少に伴うもので、その程度の量であり、ランダウ反磁性による磁場 $|\mathbf{H}_2|$ は、印加磁場 $|\mathbf{H}_1|$ より十分小さく、 δU_{m22} は大きくないから、その結果としてのエントロピーの減少も小さいことが結論される。この過程は繰返されて、磁場の滲透を許した境界の常磁性電子群は、つぎつぎと反磁性に転じ、従って磁場の滲透がなくなり、最終的には、式 (7-23) が、至るところ、等号になる状態、すなわち、マイスナー効果の状況に落ち着くことになる。

なお以上の記述は、もし、磁場が完全に滲透したランダウの状態がはじめに存在したとした

場合の仮想的な結果であって、実際は、考えている体系は磁場の印加と共に自動的にマイスナー効果の状態になり、ランダウの想定したような状態は造れない。又、試料の境界面を一周するような巨視的に大きい一電子の電子状態を想定し、それが一挙に軌道状態を変えるということも、もともと起り得ない。それは第一に、電子間双相互作用の存在により、そんなに長距離に一つの電子の波動関数が、伸びると想定することは正しくない。第二に、媒達論の原理に基づき、長距離に伸びた電子状態が、光速度より早く一挙に、コヒーレントにその状態を変えることは、原理的に発生出来ない*。従って、式(7-23)は、熱擾乱による δj ，すなわち、マクスウェルの巨視的電流と認め得る最小の電流単位に対して適用されるべきものであって、巨視的には点に近い体積 ΔV に、閉回路として発生するものとして、文献1)では描写されているのである。いづれにしても、ランダウの想定した状態には原理的に起り得ない。

なお(7-23)のTE原理の本質は、高い位置で支えられた単振子を考えて戴ければよく、この場合、支えを外すと落下し、巨視的な運動エネルギーとしての〔TE〕を発生する。〔TE〕は熱力学的な準静的に設定される配位空間(Configuration Space)中に表現できない、遷移状態のエネルギーを意味し、ある意味で、一旦外に出たエネルギーは、完全には元に戻らないという不可逆過程の一つの原理を表現する。古典力学の動的な原理に基づく運動の開始は、すべて〔TE〕を発生させる過程として理解できる。磁場中の電子の反磁性サイクロトロン運動自身も、磁気エネルギーを下げ、その下げた分だけが、〔TE〕として、印加磁場の源に向かって飛行するものと理解することが可能である。しかし量子論的には単純であるが、古典的には一電子だけでは単振子のような形式になり、不可逆過程ではなく、可逆過程の形式になって了う。多数ケの電子があり、少くとも閉回路の形式で、サイクロトロン運動が形成されたときに、上記の原理が、正確に作動するという複雑性を持つものである。しかしながら、この事情の結果として、その逆の場合、磁場中で、電子が常磁性的な軌道運動を集団として行うことは、物理学の原理としてはあり得ないのである。もし発生すると、磁気エネルギーが上昇し、その上昇に見合うエネルギーを、印加磁場の源から貰わねばならないから、負の〔TE〕が巨視的に発生しなくてはならなくなる。これは式(7-23)で余程の $T\delta S$ の利得がない限り、起らない。なお遷移エネルギー原理自身は、既存の物理学、すなわち、力学、電磁気学、及び簡単な場合の熱学・統計力学の原理が、媒達論の原理と両立できる唯一の原理として、解析的、数学的に導出、発見されている³³⁾。もちろん、式(7-23)は可能な状態変化の範囲内で、その進行方向を規定するものであって、物理学的に、例えば、電磁気学的に不可能な変化を考慮する必要の

* ここに従来の量子物理学の基礎常識と、新体系物理学による理解との相異が顔を出す。

ないことは当然である。

さて、ランダウや、ダーウィン、ヴァン・ブレック達の想定した状況のもとでは、ポテンシャル壁中の多電子系は、自動的にマイスナー効果の状況になり、その事は超電導体の観測によつて実証されていると新体系物理学は結論する。常電導金属では結晶格子を形成する金属イオンと、電導電子との間の相互作用、散乱があつて、巨視的な永久電流を維持できない体系であり、もちろん、式(6-64)、(6-71)に示されるような巨大な ρ を持つ軌道が安定には存在できない。通常こうした金属では 200\AA といった程度の平均自由行路程を考えて居る。ところで、式(7-6)や、式(7-18)の結果は考えている体系の大きさに無関係な結果になっている。従つて、もし、これらの金属において、 $200\text{\AA} \sim 400\text{\AA}$ といったところで、常に散乱が起り、結果として、そこに完全なポテンシャルの壁があることと同等になっているものと仮定すると、この場合、ランダウの反磁性の状態に幾分近いものになると推定される。その場合、関与する磁気エネルギーは、電子の造る回路の半径に比例するから、 200\AA と 5mm として、先の計算に比し、

$$\frac{200 \times 10^{-10}}{5 \times 10^{-3}} = 4 \times 10^{-6} \quad (7-24)$$

の因子が掛り、先に 10^2eV と考えた磁気エネルギーは

$$4 \times 10^{-4} \text{eV} \sim 5^\circ\text{K} \quad (7-25)$$

の桁となり、熱擾乱と競合できなくなる。もちろん、磁気能率にも式(7-24)の因子が掛る。そうすると、結果としての磁化は僅少なものとなり、

$$|x| \ll 1 \quad (7-26)$$

の場合には、新体系物理学に従う体系の熱統計も、磁気エネルギーを無視した、従来の方法が、十分な近似になり得る(文献34), Eq. (77), p. 224) という結果に基づいて、ランダウの反磁性の取り扱いが、意義を持つ可能性が出て来るが、この場合には、先に無視した $m > 0$ の場合も十分に考えなければならないであろう。

§8. 新体系物理学の提起する電導電子反磁性の世界像と、Q.E.Dとの関係

以上で本稿の課題の大綱は終り、新体系物理学の考え方に就いては、文献1)を読んで戴きたいというのが、公式的な答であるが、最後に新体系物理学の創造した電導電子反磁性の世界像を、極く大雑把に概観しておく。

新体系物理学は磁場のもとにおける電導電子の反磁性に関して、先ず明瞭に二つの場合を区

別する。それは

A. 巨視的な永久電流を維持できる体系

B. 結晶格子との散乱があり，巨視的な永久電流を維持できない体系。

である。この際，微視的な永久電流に関して一言述べると，量子物理学によって，すべての体系は微視的な永久電流を維持できる体系であると考ええる。いわゆる古典物理学では，“まさつ”や，散乱が必ず普通であって，動いているものは，何もしなければ必ず停止するといった概念が通用しているが，新体系物理学は，巨視的物理学と微視的物理学を統一的に把握し，かつ古典物理学体系と量子物理学体系との厳密な解析的接続関係を明確化する立場である。以上のいわゆる“緩和減衰現象”は，巨視的物理学の系から，微視的物理学の系への，エネルギーの散逸として考えられるべきものであるが，新体系物理学で，量子物理学系への解析接続を考える古典物理学体系は，微視的物理学体系そのものであって，それより更に超微視的体系は存在しない。従って，理由の明白なエネルギーの散逸機構は勿論考えるが，理由の判らない，“まさつ”などに類するものは考える必要がない。従って，たとえば，新体系物理学で，磁気能率を持つ Fe^{3+} イオンの 3d 電子の軌道運動は，古典物理学の描像としても，損失のない永久運動として把握される。また度々お断りしているように^{3,6)} 電荷が加速運動をして居ると，必ず，輻射を伴うという，電磁気学の大きい誤解とは訣別して戴かねばならないのである。

さて，B は通常の常電導金属であって，この場合，磁性の研究は，その電導電子と結晶格子との散乱効果を明瞭に体系の中に取り入れて，解析しなければ正しい解答に到達できない。普通 200Å 位しか，自由行程のない電子に，僥倖を祈って，巨視的な軌道を持つ量子状態を仮定した，ヴァン・リューエン，ランダウ，ヴァン・ブレック等の計算は，以上述べたように物理学の青史に残る，世紀の誤謬を形成したのである。

次に，A は，その代表例として，超電導体があり，新体系物理学の結論と一致して，磁場のもとで，体系は表面に反磁性永久電流を発生させて，マイスナー効果の状態に入る。この結果は次のように解釈することが，出来る。

超電導体に磁場を印加すると，マクスウェルの方程式に従う起電力， $-(1/c) \partial \mathbf{A} / \partial t$ によって，表面に Eddy Current が誘起される。この誘起された電流は，そこに磁場 \mathbf{H} がある限り，ランダム運動をしている古典的電子としても，又量子物理学に従う，単一電子の状態としても，マイスナー状態の滲透深度の状況のもとで，運動学的に安定化する³⁵⁾ その状況が熱力学的にも安定であることを証明することは，相当に周到な準備が必要で，文献 1) の膨大な頁数が必要である。しかし結論は明瞭で，各電子は，その電子の存在する小さな空間 ΔV しか意識せず，その巨視的には小さいが，微視的には大きい空間 ΔV で，そこに存在する磁場 \mathbf{H}

$=H_1+H_2$ のもとで、自分の最安定熱力学的状態に落ち着こうとする。その際磁気エネルギーは本質的に重要であって、各電子の力学的な運動を記述する実効ハミルトニアンには磁気エネルギーが、含まれていないにも拘らず、熱統計効果には、その創生する〔TE〕などを通じて決定的に重要な役割りを果して、マイスナー効果の状況を、その最安定状態とすることが結論される。

なお従来の物理学で、磁場のエネルギーが無視されて来た根は深く、その根源は、量子電磁力学 (Quantum Electrodynamics, Q. E. D.) に迄及び、Q. E. D. で³⁶⁾ 電子の量子力学的状態を γ -マトリックスで表現するが、そうすることによって、電子のスピン磁気能率に基づく磁場と印加磁場との磁気相互作用エネルギーが、自動的に理論構成の枠組みの中から消えて了うというところにある。Q. E. D. から、従来の原子の量子物理学が組み立てられ、その計算結果は、原子のエネルギー準位や、電子の g -因子等、広汎な分野で、八桁、九桁と言った理論と実験との一致を得ていた訳で、まさか、そんな厳密な理論体系に、大きい欠陥があると、誰も考えなかったという歴史がある。なおこの問題は電子の自己エネルギー無限大の発散という、Q. E. D. の持つ最大の欠陥と結合して居り、従って、発散の問題を解決しない限り、手が着けられなかったという事情もある³⁷⁾ 本解説では余り強調しなかったけれども、新体系物理学は、電子の永久電流モデルという、発散の問題を自動的に解決する新概念の根拠を得て、以上の困難の解決を謀ることになり、六桁程度ということで、現時点ではQ. E. D. の精度よりは稍下であるが、これらの諸問題を一挙に解決し、巨視的物理学にまで展開可能な物理学の枠組みを樹立したのである³⁸⁾ 判って見るとQ. E. D. は、先述の〔TE〕に相当する、磁気誘導と呼ばれる、電磁エネルギーの移動と、磁気能率と印加磁場の存在下で、必ず存在する磁場の持つエネルギーとの両者を一緒にして無視していた訳であって、幸い、電磁気学的に両者の和の変分は零になるという厳密な関係が存在する結果³¹⁾ スペクトル線の波長といった、微視的な観測量には全くその影響が現われず、従来の原子物理学の骨組みが形成されたのである。ところが、巨視的物理学では、これらの無視された効果が重要である。一番簡単な例は変圧器であって、われわれの電力は、まさに磁気誘導によって、伝達されていると言ってよい。又磁場の持つエネルギーも、超電導マグネットの断線時等に、疑いようのない姿で現われる。そして、マイスナー効果の熱統計力学に際して、その重大な役割りが、新体系物理学によって明白化されたのであると言える。

以上新体系物理学は、従来のQ. E. D. の基礎の上に立つものではなく、Q. E. D. と併行する新物理学体系である。現状では一応 10^{-6} 程度の精度の構造を取っているが、Q. E. D. の構造を取り入れて、Q. E. D. 以上の精度に仕上げてゆく可能性も十分にあるものと予想する。

新体系物理学が、電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて；
原子構造、ラーモア反磁性の説明、ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬

従って、ここにも若い頭脳の活躍する新らしい領域のあることを指摘させて戴いて、本稿を閉じる。

なお本稿で述べた、ランダウ反磁性の量子論の理解に関して、芳田奎氏より、1981年の夏より秋にかけて、色々討議戴き、文献などの状況も知らせて戴いたという歴史がある。合せてここに感謝させて戴く。

附録 A. 拘束状態に対する Virial 定理

ハイゼンベルグ表示に拘泥することなく、新体系物理学では⁸⁾

$$\frac{d}{dt}(q_r p_r) = \dot{q}_r p_r + q_r \dot{p}_r = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} p_r - q_r \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_r} \quad (\text{A-1})$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\langle \frac{d}{dt}(q_r p_r) \right\rangle dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} \langle q_r p_r \rangle dt = 0 \quad (\text{A-2})$$

$$\overline{\left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} p_r \right\rangle} = \overline{\left\langle q_r \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_r} \right\rangle} \quad (\text{A-3})$$

ただし、 $\overline{\quad}$ は時間平均値である。定常状態では $\overline{\quad}$ は不要である。同様に $q_r^n p_r^m$ や、 $\ln q_r$ 、 $\ln p_r$ に作用させることにより

$$\overline{\left\langle \frac{dq_r}{dt} \right\rangle} = \overline{\left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} \right\rangle} = 0, \quad \overline{\left\langle \frac{dp_r}{dt} \right\rangle} = -\overline{\left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_r} \right\rangle} = 0 \quad (\text{A-4})$$

$$\overline{\left\langle p_r^n \frac{dp_r}{dt} \right\rangle} = 0, \quad \overline{\left\langle q_r^n \frac{dq_r}{dt} \right\rangle} = 0 \quad (\text{A-5})$$

$$\overline{\left\langle \frac{1}{q_r} \frac{dq_r}{dt} \right\rangle} = 0, \quad \overline{\left\langle \frac{1}{p_r} \frac{dp_r}{dt} \right\rangle} = \overline{\left\langle \frac{1}{p_r} \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_r} \right) \right\rangle} = 0 \quad (\text{A-6})$$

などが得られる。

文 献

- 1) S. Iida: 物性研究, **40** (1983) 435–473, In English.
- 2) S. Iida: J. Phys. Soc. Jpn. **37**, (1974) 1183.
- 3) 飯田修一: “新電磁気学” 上, 下, 丸善 (1975).
- 4) 文献1), Appendix B, 466–470.
- 5) H. Aoki: J. Phys. C **17** (1984).
- 6) 飯田修一: 物性研究, **40-4** (1983) 350–403.

- 7) 飯田, 大野, 神前, 熊谷, 沢田: “新版物理定数表”, 朝倉書店 (1978) 198–206.
- 8) 文献 1), § 5.
- 9) 山内恭彦: “量子力学”, 培風館 (1968) 66–73.
- 10) A. Messiah: “*Quantum Mechanics*”, vol. I., John Wiley & Sons, 344–355.
- 11) A. S. ダビドフ: “量子力学”, 改訂第二版, 新科学出版社 (1978) I, 208.
- 12) F. Seitz: “*The Modern Theory of Solids*”, (1940) 231–234.
- 13) S. Iida: “*Derivation of the Pauli Principle for Electrons by the New Frame of Physics*”, submitted to J. Phys. Soc. Japan.
- 14) S. Iida: “*The New Frame in Classical Electromagnetism*”, submitted to J. Phys. Soc. Jpn.; 物性研究, 41 (1984)
- 15) 文献 10), p. 947.
- 16) L. Landau: Z. f. Phys. 64 (1930) 629–637.
- 17) J. H. van Leeuwen: J. de Phys. (6) 2 (1921) 361–377.
- 18) 文献 6, 366.
- 19) 文献 6, § 5, § 6.
- 20) J. H. Van Vleck: “*The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities*”, Oxford (1932) 94–102.
- 21) 飯田修一: 新電磁気学, 下, 丸善 (1975) 632–637.
- 22) C. G. Darwin: Proc. Camb. Phil. Soc. 27 (1931) 86, Item 1.
- 23) 文献 1), § 9.
- 24) R. E. Peierls: “*Quantum Theory of Solids*”, Oxford the Clarendon Press, (1955) 144–150.
- 25) S. Iida: Bussei Kenkyu 24 (1975) 1–44, In English.
- 26) 文献 3), 下, 333, 式 (15).
- 27) J. H. Van Vleck: 文献 17), 353–366.
- 28) B. Podolsky and K. S. Kunz: “*Fundamentals of Electrodynamics*” Marcel Dekker, New York & London (1969) § 3.
- 29) H. Welker: Z. Phys. 114 (1935) 525.
- 30) 文献 1), 440, Eqs. (11), (12).
- 31) 文献 1), Eq. (39), 448.
- 32) 文献 1), Eq. (40), 449.
- 33) 文献 1), Eq. (72), 459.
- 34) S. Iida: “*Introduction of A New Principle in the Theory of Magnetism, II*”, Bussei Kenkyu, 24 (1975) 207–246.

新体系物理学が、電子の軌道運動とその反磁性の理解に与えた進歩の内容に就いて；
原子構造，ラーモア反磁性の説明，ヴァン・リューエン及びランダウ反磁性の誤謬

- 35) 文献 1)，§ 9.
- 36) K. Nishijima: “*Fields and Particles*”, W. A. Benjamin, Inc., (1969).
- 37) W. Heitler: “*The Quantum Theory of Radiation*”, Oxford, at the Clarendon Press (1954).
- 38) 文献 1)，§ 5, § 6.